

分析开关功率变换器的一种新方法*

丘水生

(华南理工大学 无线电工程系)

摘要 本文提出一种分析非谐振式DC-DC开关功率变换器稳定状态的符号算法。这类系统用高阶时变微分方程来描述,然后利用等效小参量法原理导出原系统的等效线性方程组及其求解公式。这一方法可得到全符号数学式表示的解,容易导出输出波纹公式,通用性好,在工程上有重要的应用价值。

关键词: 功率变换器; 时变系统; 符号分析; 解析法; 功率电子学; 解析解

中图资料分类号: TN 711.4

开关功率变换器的主要分析方法可分为两大类:简化的状态空间平均法^[1,2]和一般化的平均法^[3,4]。前者不适用于有限开关频率的情况,也无法求出输出波纹。后者应用于稳态分析时过于繁琐,且往往遇到不存在小参量的问题^[3],有关文献中尚未得到基本开关变换器输出波纹的解析公式。因此,目前已有的理论尚不能满足工程应用的需要。本文提出的稳态分析方法利用等效小参量法的原理^[4],算法较简单,易于进行波纹分析,所得解析式也适于开关频率较低的情况。文中采用高阶算子方程来描述开关变换器,便于在闭环变换器中推广应用时得到解析结果。

1 高阶系统方程的建立

开关功率变换系统一般具有两种或多种电路组态,前一类系统的状态方程可表示为

$$\frac{dx}{dt} = (AX + BE)\delta + (A'x + B'E)\delta'$$

式中 X 、 E 及各系数均为矩阵, δ 的定义为

$$\delta = \begin{cases} 1 & (0 < t \leq \tau_1) \\ 0 & (\tau_1 < t \leq T) \end{cases}$$

T 为开关周期,而 $\delta' = 1 - \delta$ 。当 δ 或 δ' 的值为 1 时表示相应开关接通,否则开关断开。

考虑线性微分方程

* 国家自然科学基金资助项目

来稿日期: 1993-11-29

$$G(p)y = \delta''x \quad (1)$$

式中, $p = d/dt$, $\delta'' = \delta$ 或 δ' , 且非正弦周期函数 $\delta''x$ 可表示为

$$\delta''x = d_0 + \sum_{n=1}^N (d_n e^{jn\omega t} + \bar{d}_n e^{-jn\omega t})$$

为得到紧缩的高阶系统方程, 现定义

$$g(p) = 1/G(p)$$

式中, $G(p)$ 为算子多项式, $g(p)$ 为 $G(p)$ 的逆算子。容易证明下列等式成立:

$$\begin{aligned} g(p)(\delta''x) &= d_0g(p) + \sum_{n=1}^N (d_n g(p)e^{jn\omega t} + \bar{d}_n g(p)e^{-jn\omega t}) \\ &= d_0g(0) + \sum_{n=1}^N (d_n g(jn\omega)e^{jn\omega t} + \bar{d}_n g(-jn\omega)e^{-jn\omega t}) \end{aligned} \quad (2.1)$$

且式(1)的稳态形式可写成

$$y(t) = g(p)(\delta''x) \quad (2.2)$$

利用式(1)和(2), 由开关变换器的状态方程可得到如下形式的高阶算子方程

$$g_1(p)x + k_2f = g_3(p)[(1 - \delta')E_s] \quad (3.1)$$

$$y = g_4(p)f' \quad (3.2)$$

式中

$$f = \delta'g_2(p)(\delta'x) \quad (4)$$

$$f' = \delta''x \quad (5)$$

而 $g_1(p), g_3(p)$ 为 p 的多项式, E_s 为直流电源, x 为电流或电压。式(3.1)为稳态系统方程, 式(3.2)为稳态输出方程。

2 分析方法原理

现将等效小参量法的原理^[3]推广应用于式(3)。通常, 时变函数 f 不是小量。根据该方法原理, 将 f 的主部 f_0 除去后的余量 f_R 可看成小扰动(对 $\delta'E_s$ 也可作类似处理), 而式(3)可写成

$$g_1(p)x + k_2f_0 - g_3(p)[(1 - \delta'_0 E_s)] = -g_3(p)(\delta'_R E_s) - k_2f_R = f'_R \quad (6)$$

由于 $f'_R = \mu(f'_R/\mu)$, 常数 $\mu \ll 1$, f'_R/μ 与 f_0 同一数量级, 故式(6)的小参量 μ 是实际存在的, 因而可应用扰动法原理。于是令

$$f = f_0 + \sum_{i=1}^I \varepsilon^i f_i \quad (7)$$

$$x = x_0 + \sum_{i=1}^I \varepsilon^i x_i \quad (8)$$

式中, 下标 0 和 i 分别表示主要(零次)和第 i 次近似分量; $\varepsilon = 1$, ε^i 的作用在于指示实际小量 μ^i 的所在位置^[3]。这样, 就避免了人为地引入实际小参量 μ 所带来的麻烦。

$$\text{令 } D \triangleq \tau_1/T, \quad D' = (T - \tau_1)/T = 1 - D \quad (9)$$

将 δ' 展开为

$$\delta' = b_0 + \sum_{m=1}^M (b_m e^{jm\tau} + \bar{b}_m e^{-jm\tau}) \quad (10.1)$$

而

$$\delta = 1 - \delta' \quad (10.2)$$

式中, $\tau = \omega t$, 而

$$b_0 = D, \quad b_m = \frac{1}{2} (\alpha_m - j\beta_m)$$

$$\alpha_m = \frac{-\sin 2Dm\pi}{m\pi}, \quad \beta_m = \frac{\cos 2Dm\pi - 1}{m\pi}$$

令

$$\delta' = \delta'_0 + \sum_{i=1}^I \epsilon^i \delta'_i \quad (11)$$

选取

$$\delta'_0 = b_0 + b_1 e^{j\tau} + \bar{b}_1 e^{-j\tau} \quad (12.1)$$

$$\delta'_i = b_{(i+1)} e^{j(i+1)\tau} + \bar{b}_{(i+1)} e^{-j(i+1)\tau} \quad (12.2)$$

或

$$\delta'_i = b_{2i} e^{j2i\tau} + \bar{b}_{2i} e^{-j2i\tau}$$

$$+ b_{(2i+1)} e^{j(2i+1)\tau} + \bar{b}_{(2i+1)} e^{-j(2i+1)\tau} \quad (12.3)$$

类似地, 对于 δ'' 具有与式(11)和(12)形式相同的公式(但上标不同)。

$$x_0 = \sum_{n \in E_0} x_{no} = A_{00} + \sum_{n \in E_0} (a_{no} e^{jn\tau} + \bar{a}_{no} e^{-jn\tau}) \quad (13)$$

$$x_i = \sum_{k \in E_i} x_{ki} = \sum_{k \in E_i} (a_{ki} e^{jk\tau} + \bar{a}_{ki} e^{-jk\tau}) \quad (14)$$

式中, a_{no} 和 a_{ki} 分别为零次近似第 n 次谐波和第 i 次近似 k 次谐波; E_0 和 E_i 分别 x_0 和 x_i 各分量的频率的集合。将式(8)和(10)代入(7)得

$$f_0 = \sum_{n \in E_0} \psi_{no} + \dots \quad (15.1)$$

$$f_i = \sum_{k \in E_i} \psi_{ki} + \dots \quad (15.2)$$

令

$$f_0 = f_{om} + \epsilon R_1 \quad (16.1)$$

$$f_i = f_{im} + \epsilon R_{(i+1)} \quad (16.2)$$

$$\delta'_i = \delta'_{im} + \epsilon R'_{(i+1)} \quad (16.3)$$

即是将 f_0 , f_i 和 δ' 分为两部分, 其主部分别为 f_{om} , f_{im} 和 δ_{im} , 而余量函数 ϵR_1 , $\epsilon R_{(i+1)}$ 和 $\epsilon R'_{(i+1)}$ 均为比主部高一阶的小量。

令

$$f_{om} = \sum_{n \in E_0} \psi_{no} = d_{00} + d_{10} e^{j\tau} + \bar{d}_{10} e^{-j\tau} + \dots \quad (17.1)$$

$$\delta'_{om} = \sum_{n \in E_{om}} \varphi_{no} = \Phi_{00} + \dots \quad (17.2)$$

$$f_{im} = \sum_{k \in E_i} \psi_{ki} = \sum_{k \in E_i} (d_{ki} e^{jk\tau} + \bar{d}_{ki} e^{-jk\tau}) \quad (18.1)$$

$$\delta'_{im} = \sum_{k \in E_{im}} \varphi_{ki} = \sum_{k \in E_{im}} (\Phi_{ki} e^{jk\tau} + \bar{\Phi}_{ki} e^{-jk\tau}) \quad (18.2)$$

由式(16)得

$$R_i \triangleq f_{(i-1)} - f_{(i-1)m} = \sum_{k \in E_i} (U_{ki} e^{jk\tau} + \bar{U}_{ki} e^{-jk\tau}) \quad (19.1)$$

$$R'_i \triangleq \delta'_{(i-1)} - \delta'_{(i-1)m} = \sum_{k \in E_i} (R_{ki} e^{jk\tau} + \bar{R}_{ki} e^{-jk\tau}) \quad (19.2)$$

当确定式(17)至(19)中的各频率集合时,首先根据解的精度要求选取 E_{om} 和 E'_{im} (分别为 δ'_{om} 和 δ'_{im} 的频率集合),然后令

$$E_0 = E'_{om}, \quad E_i = E_i \cup E'_{im} \cup E'_{ir} \quad (20.1)$$

当式(3.1)的右边不存在 δ 时,可根据解的精度选取 E_0 ,且令 $E_i = E_{ir}$,式中 E_{ir} 是按式(19)的定义式来确定的。实际的 DC-DC 开关变换器中,主要变量的交流分量是不大的,通常可取

$$E'_{om} = \{0\}, \quad E'_{im} = \{i+1\}; \quad E_0 = \{0\} \quad (20.2)$$

将式(7)、(8)、(11)、(16)等代入(3.1),并令等式两边 ε^0 、 ε^1 和 ε^2 等的系数分别相等,可得到一组等效的时不变线性方程

$$g_1(p)x_0 + k_2 f_{om} = g_3(p)[(1-\delta'_{om})E_s] \quad (21)$$

$$g_1(p)x_1 + k_2 f_{im} = -g_3(p)(\delta_{im} + R'_1)E_s - k_2 R_1 \quad (22.1)$$

$$g_1(p)x_2 + k_2 f_{2m} = -g_3(p)(\delta_{2m} + R'_2)E_s - k_2 R_2 \quad (22.2)$$

将式(13)、(14)、(17)、(18)、(19)代入(21)和(22)得到矩阵方程

$$A^{(i)} X^{(i)} = U^{(i)} \quad (23)$$

一般情况下,

$$d_{ki} = d'_{ki} + \eta_{ki} a_{ki} + \gamma_{ki} \bar{a}_{ki} + \dots$$

式中

$$d'_{ki} = \eta_{oi} a_{oi} + \eta_{li} a_{li} + \dots + \eta_{(k-1)i} a_{(k-1)i} + \gamma_{(k-1)i} \bar{a}_{(k-1)i}$$

式中下标 ki 表示第 i 阶近似第 k 次谐波。在分析实际电路时可作进一步近似:计算修正量 a_{ki} 时略去同阶较高次谐波对较低次谐波的影响,(可把略去的项移到更高一阶的方程中去)得到

$$d_{11} \approx d'_{11} + \eta_{11} a_{11} + \gamma_{11} \bar{a}_{11} \quad (24.1)$$

$$d_{ki} \approx d'_{ki} + \eta_{ki} a_{ki} \quad (\text{当 } k, i \neq 1) \quad (24.2)$$

$$\text{另外} \quad d_{00} = \eta_{00} A_{00} \quad (24.3)$$

式(24.2)表明当 $k > 1$ 或 $i > 1$ 时 \bar{a}_{ki} 不出现, 而不是小量 $\gamma_{ki} \bar{a}_{ki}$ 被略去。

利用式(20)和(24), 由式(23)得

$$A_{00} = \frac{g_3(0)(1 - \Phi_{00})E_s}{g_1(0) + \eta_{00}} \quad (25)$$

$$(g_1(jk\omega) + \eta_{ki})a_{ki} + y_{ki}\bar{a}_{ki} \\ = -g_3(jk\omega)(\Phi_{ki} + R_{ki})E_s, \quad (k \in E_i, k = 1) \quad (26.1)$$

$$a_{ki} = \frac{-g_3(jk\omega)(\Phi_{ki} + R_{ki}) - (U_{ki} + d'_{ki})}{g_1(jk\omega) + \eta_{ki}} \\ (k \in E_i, k \neq 1 \text{ 或 } k \in E_i, i > 1) \quad (26.2)$$

可见, 利用式(26), 确定输出波纹及直流修正量就变成了简单的复数计算问题。

现讨论式(3.2)的算法。与式(7)和(11)相类似, 令

$$\delta'' = \delta'_0 + \sum_{i=1}^I \varepsilon^i \delta''_i \quad (27)$$

$$f' = f'_0 + \sum_{i=1}^I \varepsilon^i f'_i \quad (28)$$

将式(8)和(27)代入(3.2)并利用式(2)得

$$f'_0 = \delta''_0 x_0, \quad f'_1 = \delta''_1 x_0 + \delta''_0 x_1, \quad \dots \\ y = y_0 + \varepsilon y_1 + \varepsilon^2 y_2 + \dots \quad (29)$$

式中

$$y_0 = y_{00} + y_{10} = b''_0 A_{00} g_4(0) + (b''_1 A_{00} g_4(j\omega) e^{j\tau} + \text{共轭项}) \quad (29.1)$$

$$y_1 \approx y_{01} + y_{11} + y_{21} = (\bar{b}''_1 a_{11} + b''_1 \bar{a}_{11}) g_4(0) \\ + (b_0 a_{11} g_4(j\omega) e^{j\tau} + b_1'' a_{11} g_4(j2\omega) e^{j2\tau} + \text{共轭项}) \quad (29.2)$$

所得直流和交流输出分别为

$$y_D = y_{00} + \varepsilon y_{01} + \dots \quad (30.1)$$

$$y_A = y_{10} + \varepsilon(y_{11} + y_{21}) + \dots \quad (30.2)$$

式中, y_{no} 为零阶第 n 次谐波分量, y_{ki} 则是第 i 阶第 k 次谐波分量。

3 例子

考虑 DC-DC 升压开关变换器, 其等效电路如附图所示, 高阶算子方程为

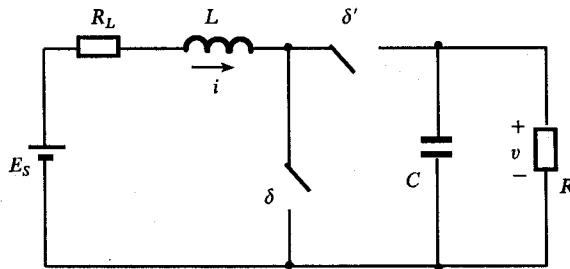
$$g_1(p)i + f = E_s \quad (31.1)$$

$$v = g_4(p)f' \quad (31.2)$$

式中

$$f = \delta' [g_2(p)(\delta'i)] , \quad f' = \delta'i$$

$$g_1(p) = Lp + R_L , \quad g_2(p) = g_4(p) = \frac{R}{RCp + 1}$$



附图

比较式(31)与(3),由式(22)可直接写出式(31.1)的等效方程组

$$g_1(p)x_0 + f_{0m} = E_s \quad (32)$$

$$g_1(p)x_1 + f_{1m} = -R_1 \quad (33.1)$$

$$g_2(p)x_2 + f_{2m} = -R_2 \quad (33.2)$$

由式(32)得

$$A_{00} = \frac{E_s}{R_L + R(D')^2 + 2\bar{b}_1 b_1 g_2} \approx \frac{E_s}{R_L + R(D')^2} \quad (34)$$

式中

$$g_{2r} = \frac{R}{1 + (\omega RC)^2}$$

由式(33.1)得

$$(g_1(j\omega) + \eta_{11})a_{11} + \gamma_{11}\bar{a}_{11} = -(d'_{11} + U_{11}) \quad (35)$$

式中

$$\eta_{11} = b_0^2 g_2(j\omega) + b_1 \bar{b}_1 g_2(0), \quad \gamma_{11} = b_1^2 g_2(0)$$

$$d'_{11} \approx \bar{b}_1 b_2 A_{00} g_2(-j\omega), \quad U_{11} = b_0 b_1 A_{00} g_2(0)$$

当开关频率较高时,式(35)可简化为

$$a_{11} = \frac{-U_{11}}{g_1(j\omega) + \eta_{11}} \approx \frac{b_1 R D' A_{00}}{j\omega L + b_1 \bar{b}_1 R} \quad (36)$$

由式(33.1)得另一结果

$$a_{21} = \frac{-(d'_{21} + U_{21})}{g_1(j2\omega) + \eta_{21}} \approx \frac{-(b_2 D' R + b_1^2 g_2(j\omega)) A_{00}}{j2\omega L}$$

利用式(29)可得到式(31.2)的解:

升压变换器的直流输出电压为

$$V_D \approx V_{00} + \varepsilon(\bar{b}_1 a_1 + b_1 \bar{a}_{11}) R \quad (37)$$

其近似式为

$$V_D \approx V_{00} = \frac{R D' E_s}{R(D')^2 + R_L + 2b_1 \bar{b}_1 g_{2r}} \approx \frac{R D' E_s}{R(D')^2 + R_L} \quad (38)$$

输出波纹为

$$\begin{aligned} V_A &\approx b_1 A_{00} + \varepsilon D' a_{11} g_2(j\omega) e^{j\tau} \\ &\quad + \varepsilon(b_1 a_{11} + b_2 A_{00}) g_2(j2\omega) e^{j2\tau} + \text{共轭项} \\ &\approx \frac{R(b_1 A_{00} + D' a_{11})}{1 + j\omega RC} e^{j\tau} + \text{共轭项} \end{aligned} \quad (39)$$

式(38)表明,目前常用的相应公式^[1]是本文所得零阶近似 V_{00} 的近似值。

4 结语

本文表明,新方法通用性好,所得结果都是符号表达式,容易求出输出波纹,因而在工程设计和计算机符号分析中有重要的应用价值。现有文献中尚未得到式(39)或类似的波纹计算式。由式(37)和(38)可知,本文所得公式精确度较高,适用于开关频率较低的情况(目前文献中的相应公式在此情况有较大的误差,因为波纹很小的假设此时往往不成立)。本文的新方法可应用于需要考虑晶体管内阻和寄生电容等非理想开关参数的情况。对 E_s 、 D 和 x_0 的直流分量引入扰动,容易由式(21)导出开关变换器的小信号模型。

参 考 文 献

- Middlebrook R, Cuk S. A general unified approach to modeling switching-converter power stages. IEEE PESC Record, 1976
- Ninomiya T, et al. A unified analysis of resonant converters. IEEE Trans. on Power Electronics, 1991, 6(2):260~270
- Krein P, Bentsman J, et al. On use of averaging for the analysis of power electronic systems. IEEE Trans. on Power Electronics, 1990, 5(2):182~190
- Sanders S, et al. Generalized averaging method for power conversion circuits. IEEE Trans. on Power Electronics, 1991, 6(2):251~258
- 丘水生.非线性网络与系统.成都:电子科技大学出版社,1990

A NEW APPROACH FOR SWITCHING POWER CONVERTERS

Qiu Shuisheng

(Dept. of Radio Eng., South China Univ. of Tech.)

Abstract A symbolic algorithm for switching power converters is presented. This kind of circuits can be modeled with one or more higher-order time-variant differential equations. First, one derives a set of equivalent linear differential equations from the original equations using the principle of the equivalent small parameter method, then the symbolic solutions can be obtained. The solutions are all the symbolic expressions. The corrections and ripple are estimated easily. The approach has been seen to be more useful in design of switching power converters than the method of state-space averaging.

Key words: power converters; time varying system; symbolic analysis; analytical method; power electronics; analytic solutions