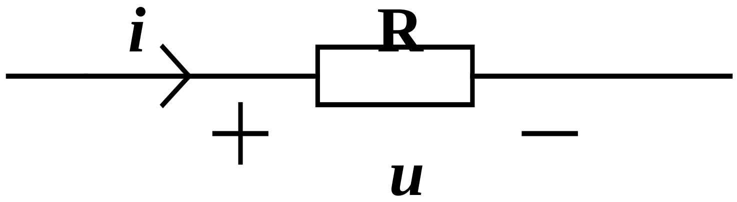
3－5正弦交流电路中的电阻元件

1.电阻元件的概念

电阻元件是体现电能转化为其他形式能量的二端元件。

2.电阻元件上的电压电流关系



1) 瞬时值关系

在如图所示的参考方向下

$$u = R\,i$$

选电流 i 为参考正弦量，即 $i = \sqrt{2} I \sin \omega t$

设 $i=\sqrt{2}I\sin\omega t$ $u=\sqrt{2}IR\sin\omega t=\sqrt{2}U\sin\omega t$

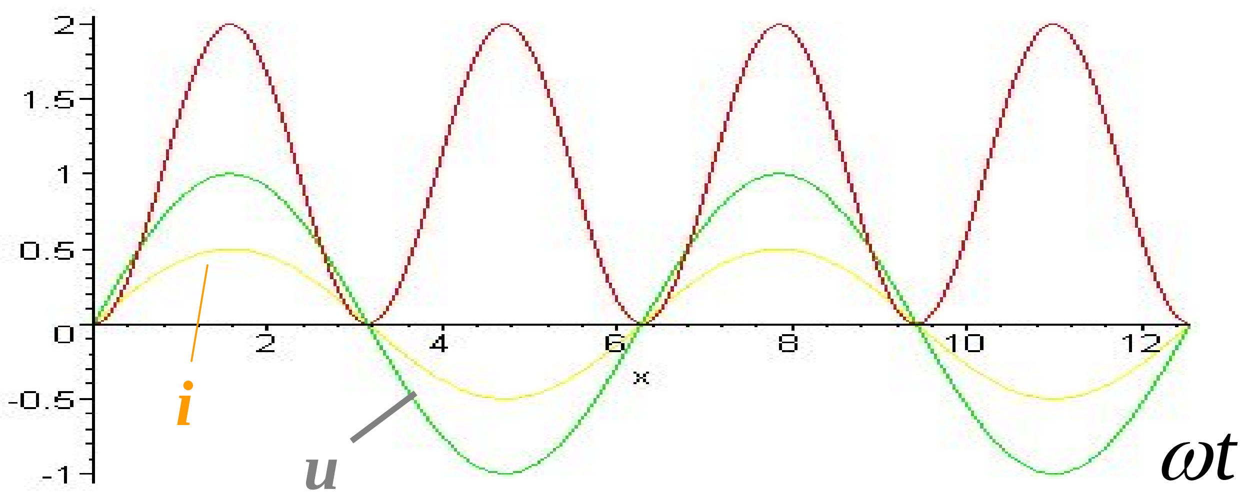
其中记： U = R I

讨论：

a. 电阻上的电压、电流是同频率的正弦量。

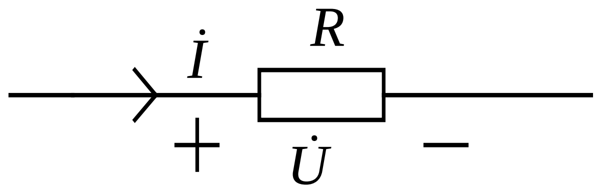
b. 电压、电流同相

c. 波形图



2、有效值关系

$$U = IR$$



3、相量关系及相量电路模型

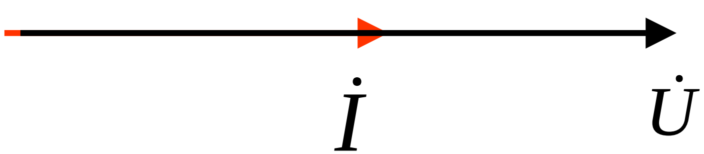
$$u = Ri = R\mathcal{I}_m(\sqrt{2}\dot{I}e^{j\omega t})$$

$$= \mathcal{I}_m(\sqrt{2}\dot{I}\,\mathrm{R}\times \mathrm{e}^{j\omega t}) = \mathcal{I}_m(\sqrt{2}\dot{U}e^{j\omega t})$$

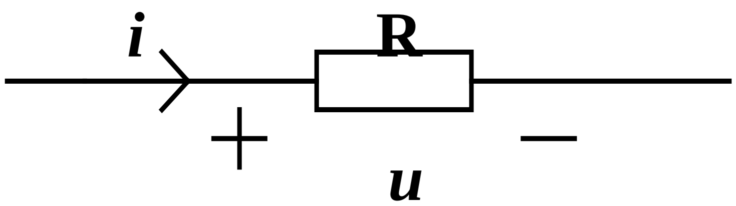
$$\dot{U} = \dot{I}R$$

复数形式的欧姆定律

同时表示了电压、电流的有效值关系和相位关系。



3.电阻元件上的功率和能量



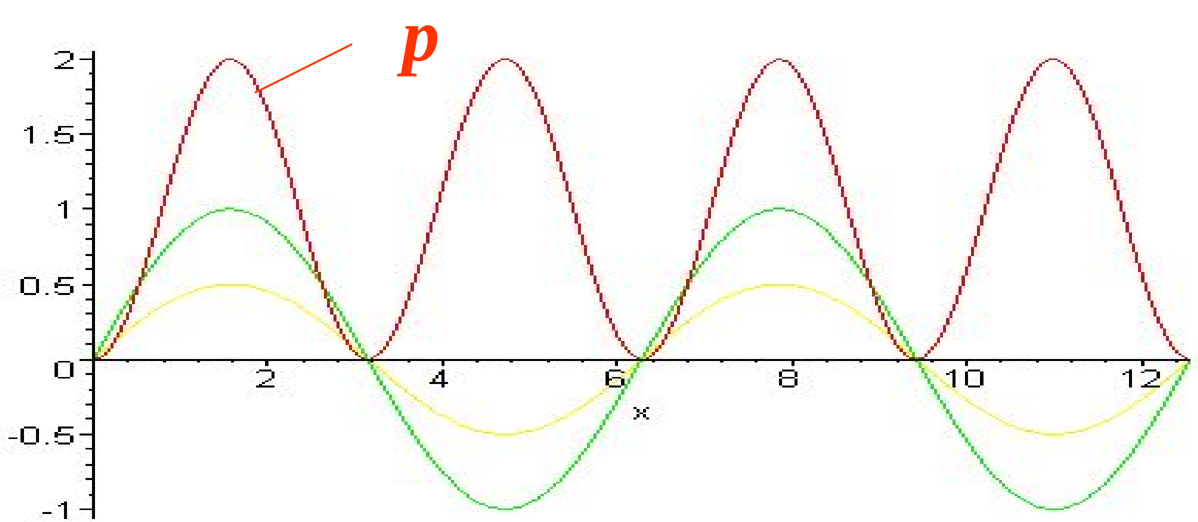
1) 瞬时功率

设 $i=\sqrt{2}I\sin\omega t$　　$u=\sqrt{2}U\sin\omega t$

$$p=ui=\sqrt{2}U\sin\omega t\sqrt{2}I\sin\omega t$$

$$=UI(1-\cos 2\omega t)$$

$p\geq 0$　说明是耗能元件



2)平均功率

$$P=\frac{1}{T}\int_0^T p\,dt=\frac{1}{T}\int_0^T UI(1-\cos 2\omega t)dt=UI$$

3)能量

$$W=\int_{-\infty}^{t} p\,d\tau=\int_{-\infty}^{t} u(\tau)i(\tau)d\tau$$

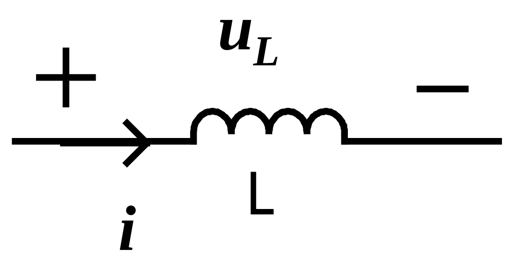
$$W(t_0,t)=\int_{t_0}^{t} p(\tau)d\tau=\int_{t_0}^{t} u(\tau)i(\tau)d\tau$$

3-6 正弦交流电路中的电感元件

1.电感元件的概念

电感是体现磁场储能的二端元件。

2.电感上电压电流关系



1）瞬时值关系

$$u_L = L\frac{di}{dt}$$

选择电流作为参考正弦量

$$i = \sqrt{2}\, I \sin \omega t$$

$$u_L(t) = L\frac{di}{dt} = L\frac{d}{dt}(\sqrt{2}\, I \sin \omega t) = \sqrt{2}\, \omega L I \sin(\omega t + 90^{\circ})$$

讨论：

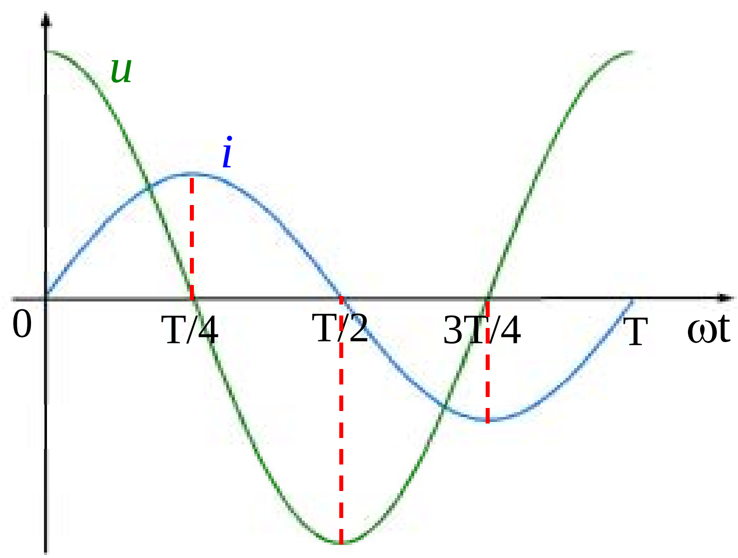
1、 $X_L \triangleq \omega L$ 自感电抗/感抗 单位：欧姆(Ω)

$B_L \triangleq \frac{1}{\omega L} = \frac{1}{X_L}$ 电感电纳/感纳 单位：西门子(S).

$\omega = 0$，$X_L=0$ 直流电路中 L 元件相当于短路

2、电感电压、电流同频率

3、电感电压超前电流90^0



2）有效值关系

$$i = \sqrt{2}\, I \sin \omega t$$

$$U_L = I \cdot X_L$$

$$u_L(t) = \sqrt{2}\, \omega L I \sin(\omega t + 90^\circ)$$

$$= \sqrt{2}\, X_L I \sin(\omega t + 90^\circ) = \sqrt{2}\, U_L \sin(\omega t + 90^\circ)$$

3）相量关系及相量电路模型

设 $i = \sqrt{2} I \sin \omega t$

$$\dot{U} = j\omega L \dot{I}$$

$$u_L = L\frac{di}{dt} = L\frac{d}{dt}(\sqrt{2} I \sin \omega t)$$

$$= L\frac{d}{dt}\left[\mathcal{I}_m(\sqrt{2}\dot{I}e^{j\omega t})\right] = \mathcal{I}_m\left[\frac{d}{dt}\left(\sqrt{2}L\dot{I}e^{j\omega t}\right)\right]$$

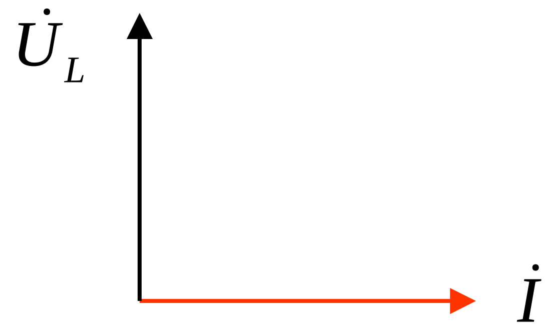
$$= \mathcal{I}_m\left(\sqrt{2}L\dot{I} \cdot j\omega e^{j\omega t}\right) = \mathcal{I}_m\left(\sqrt{2}\dot{U}e^{j\omega t}\right)$$

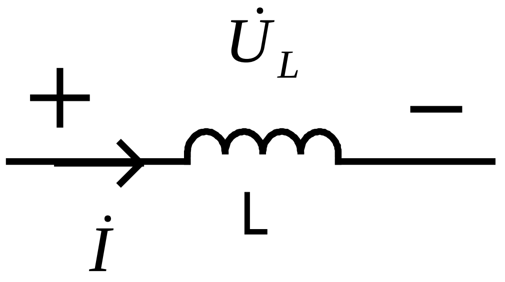
$$\dot{U} = j\omega L\dot{I} = jX_L\dot{I}$$

复数形式的欧姆定律----有效值、相位

相量运算将微分运算转化为乘以$j\omega$的代数运算。

画相量图

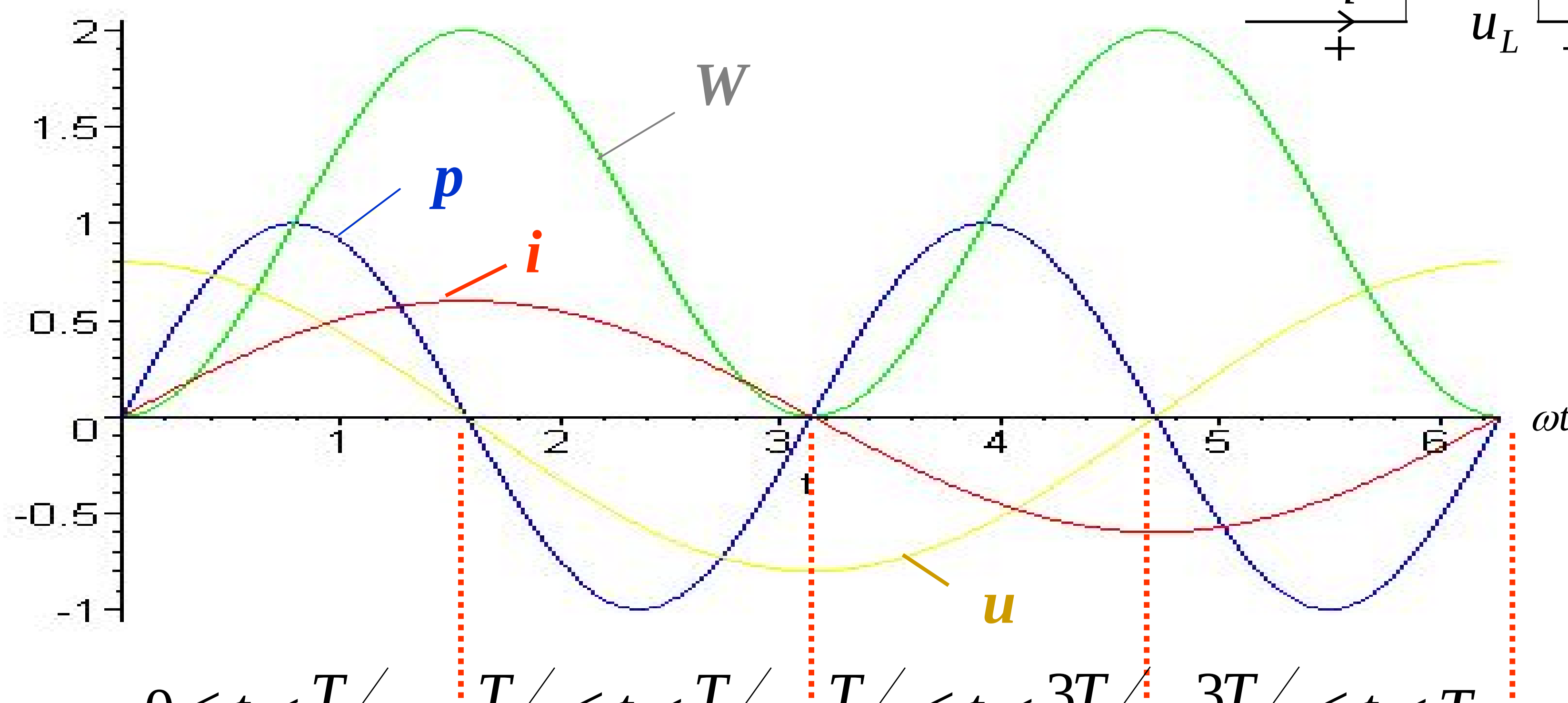


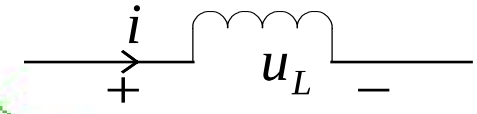


3.功率和能量

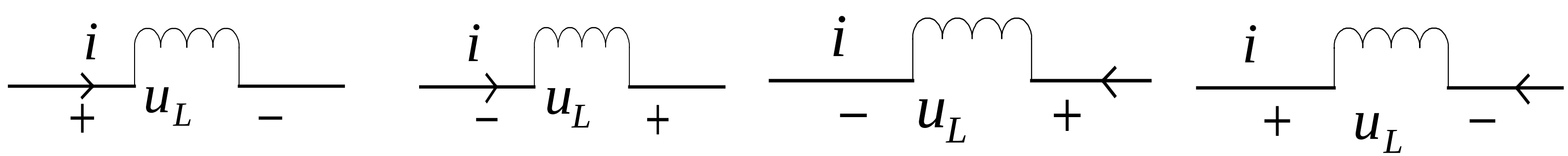
1) 瞬时功率

$$p = ui = \sqrt{2}U_L\sin(\omega t + 90^\circ)\sqrt{2}I\sin\omega t$$
$$= U_L I\sin 2\omega t$$





$0 \le t < T/4$ $\quad$ $T/4 \le t < T/2$ $\quad$ $T/2 \le t < 3T/4$ $\quad$ $3T/4 \le t < T$



吸收功率 发出功率 吸收功率 发出功率

2)平均功率

$$P=\frac{1}{T}\int_0^T pdt=\frac{1}{T}\int_0^T (U_L I\sin 2\omega t)dt=0$$

3)能量

$$W_L=\frac{1}{2}Li^2=\frac{1}{2}L(\sqrt{2}\,I\sin\omega t)^2=\frac{1}{2}LI^2(1-\cos 2\omega t)$$

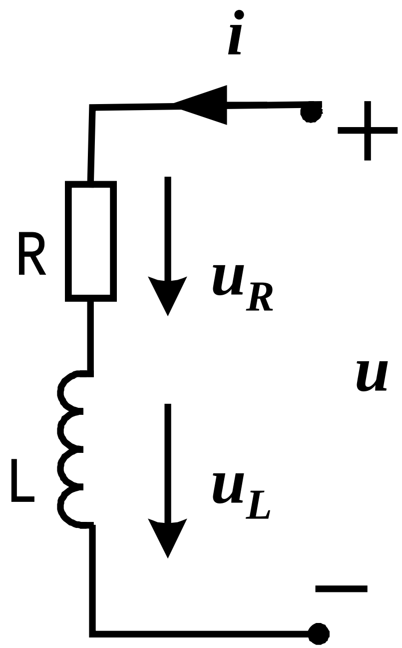
4)电感元件的无功功率

$$Q_L=U_L I=I^2 X_L$$

电感元件本身并不消耗功率，而是与电路其他部分交换功率。通常用无功功率表示电感元件与电路其他部分功率交换的幅值，这个幅值称为电感元件的无功功率。单位：乏　VAR。虽然与功率具有相同的量纲，但不代表电感消耗功率　。

4.实际电感元件

对于一个实际线圈来说，一般其电阻是不可忽略的，这时既要考虑线圈建立磁场的效应，也要计及它发热而消耗电能的效应。通常用R-L串联电路来等效一个实际线圈。



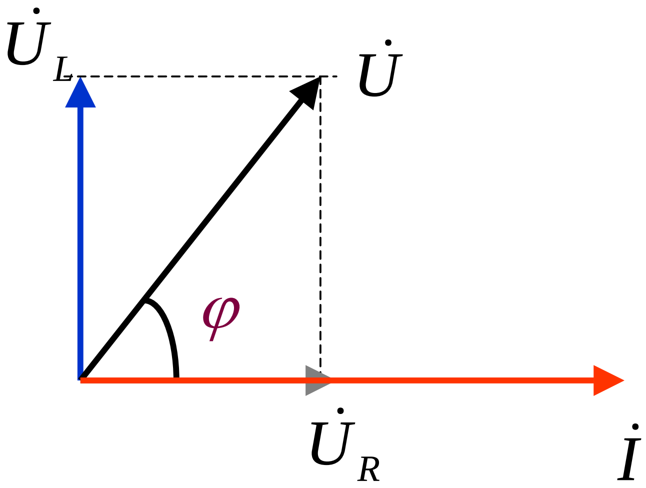
$$u = u_R + u_L = Ri + L\frac{di}{dt}$$

$$\dot{U} = \dot{U}_R + \dot{U}_L = R\dot{I} + j\omega L\dot{I} = (R + j\omega L)\dot{I}$$

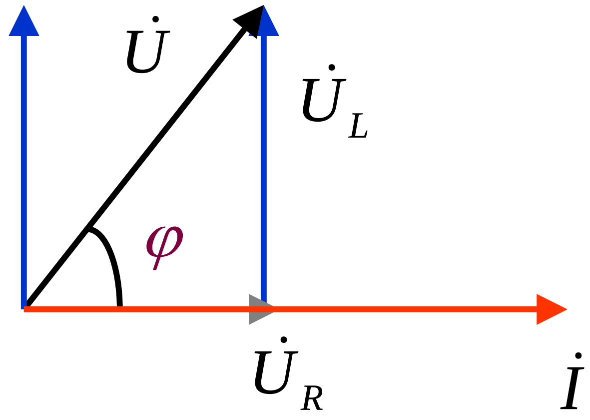
$$Z = \frac{\dot{U}}{\dot{I}} = R + j\omega L$$

复数阻抗：实部是电阻，虚部是电抗。

相量图：以 $\dot{I}$ 作为参考相量



$$\varphi = arctg\frac{U_L}{U_R} = arctg\frac{\omega L}{R}$$



例1：一个理想电感 L=0.127H $i = 0.01\sqrt{2}\sin(\omega t + 30^\circ)$

(1) f=50Hz , (2) f=5000Hz ,求 u_L ？

解: (1) f =50Hz

$$\omega = 2\pi f = 314\,rad/s$$

$$X_L = 2\pi f L = 314 \times 0.127 = 40(\Omega)$$

$$\dot{U}_L = jX_L\dot{I} = j40 \times 0.01\angle 30^\circ = 0.4\angle 120^\circ$$

$$U_L = 0.4\sqrt{2}\sin(\omega t + 120^\circ) = 0.4\sqrt{2}\sin(314t + 120^\circ)V$$

(2) f =5000Hz

$$\omega = 2\pi f = 31400\,rad/s$$

$$X_L = 4000(\Omega)$$

$$\dot{U}_L = jX_L\dot{I} = j4000 \times 0.01\angle 30^\circ = 40\angle 120^\circ$$

$$U_L = 40\sqrt{2}\sin(\omega t + 120^\circ) = 40\sqrt{2}\sin(31400t + 120^\circ)V$$

例2　一个实际电感线圈，已知 $R = 30\Omega, L = 40mH$

外加电压 $U = 10V, \omega = 1000\,rad/s$

求：1．电流的有效值。2． $u = 10\sqrt{2}$时，$i = ?$

解：1． $Z = R + j\omega L = 30 + j40 = 50\angle 53.1^\circ \Omega$

$$\dot{U} = 10\angle 0^\circ$$

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}}{Z} = \frac{10\angle 0^\circ}{50\angle 53.1^\circ} = 0.2\angle -53.1^\circ A \qquad I = 0.2A$$

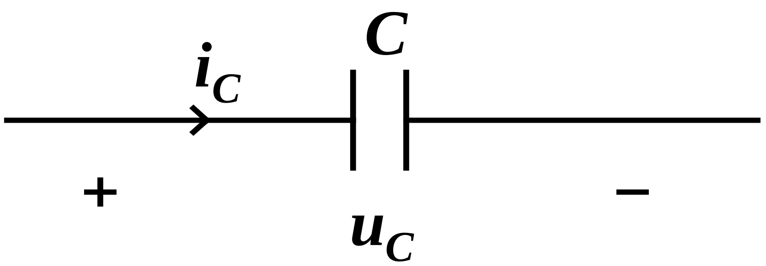
2． $u = 10\sqrt{2} \qquad \omega t = \pi/2$

$$i = 0.2\sqrt{2}\sin(\omega t - 53.1^\circ) = 0.2\sqrt{2}\sin(90^\circ - 53.1^\circ) = 0.17A$$

3－7正弦交流电路中的电容元件

1.电容元件的概念

体现电场储能的二端元件。



2.电容上电压电流关系

1) 瞬时值关系

在上述参考方向下 $i_C = \dfrac{dq}{dt} = C\dfrac{du_C}{dt}$

选择电容电压作为参考正弦量

$$u_C = \sqrt{2}U_C \sin \omega t$$

$$i_C = C\frac{du_C}{dt} = \sqrt{2}\,\omega C U_C \cos \omega t = \sqrt{2}\,\omega C U_C \sin(\omega t + 90^\circ)$$

讨论：

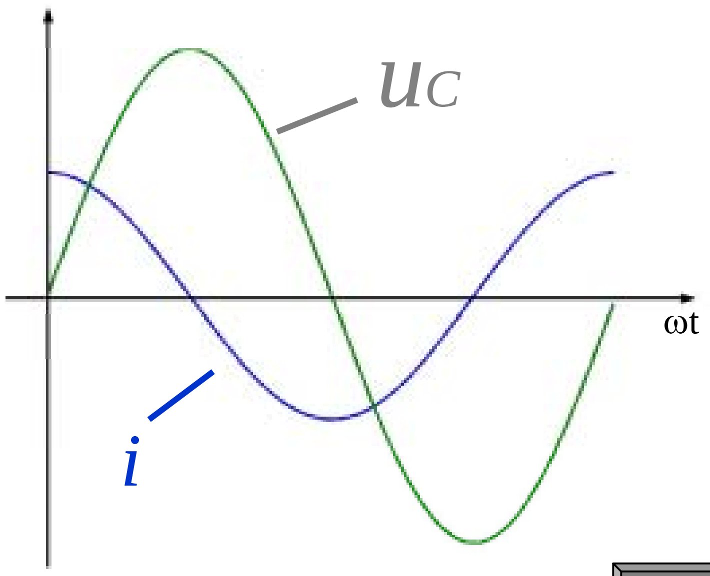
1、 $X_C \triangleq \frac{1}{\omega C}$ 电容电抗/简称容抗 单位：欧姆(Ω)

$B_C \triangleq \omega C = \frac{1}{X_C}$ 电容电纳/简称容纳 单位：西门子(S).

$\omega = 0$, $X_C = \infty$ 直流电路中 C 元件相当于开路

2、电容电压、电流同频率

3、电容电流超前电压90^0



2）有效值关系

$$u_C = \sqrt{2} U_C \sin \omega t$$

$$I_C = \frac{U_C}{X_C}$$

$$i_C = \sqrt{2} \omega C U_C \sin(\omega t + 90^\circ)$$

$$= \sqrt{2} \frac{1}{X_C} U_C \sin(\omega t + 90^\circ) = \sqrt{2} I_C \sin(\omega t + 90^\circ)$$

3）相量关系及相量电路模型

设 $u_C = \sqrt{2} U_C \sin \omega t$

$$i_C = C \frac{du_C}{dt} = C \frac{d}{dt} (\sqrt{2} U_C \sin \omega t)$$

$$= C \frac{d}{dt} \left[\mathcal{I}_m \left(\sqrt{2} \dot{U}_C e^{j\omega t} \right) \right] = \mathcal{I}_m \left[\frac{d}{dt} \left(\sqrt{2} C \dot{U}_C e^{j\omega t} \right) \right]$$

$$= \mathcal{I}_m \left(\sqrt{2} j\omega C \dot{U}_C e^{j\omega t} \right) = \mathcal{I}_m \left(\sqrt{2} \dot{I}_C e^{j\omega t} \right) = \sqrt{2} I_C \sin(\omega t + 90^\circ)$$

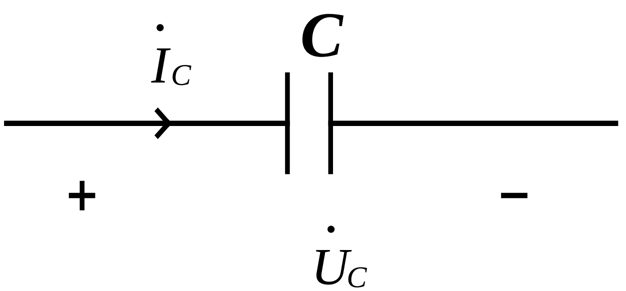
令 $\dot{I}_C = j\omega C \dot{U}_c$

令 $\dot{I}_C = j\omega C\dot{U}_c$ $\dot{U}_C = -j\dfrac{1}{\omega C}\dot{I}_C$

复数形式的欧姆定律----有效值、相位

相量运算将微分运算转化为乘以 $j\omega$ 的代数运算。

画相量图



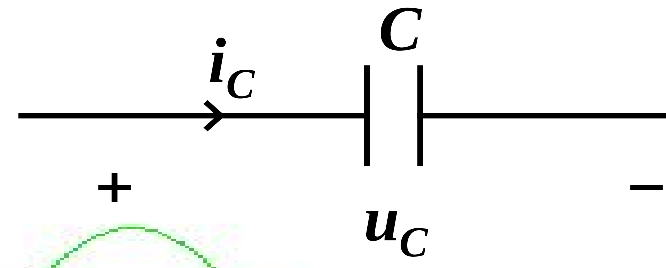
3.功率和能量

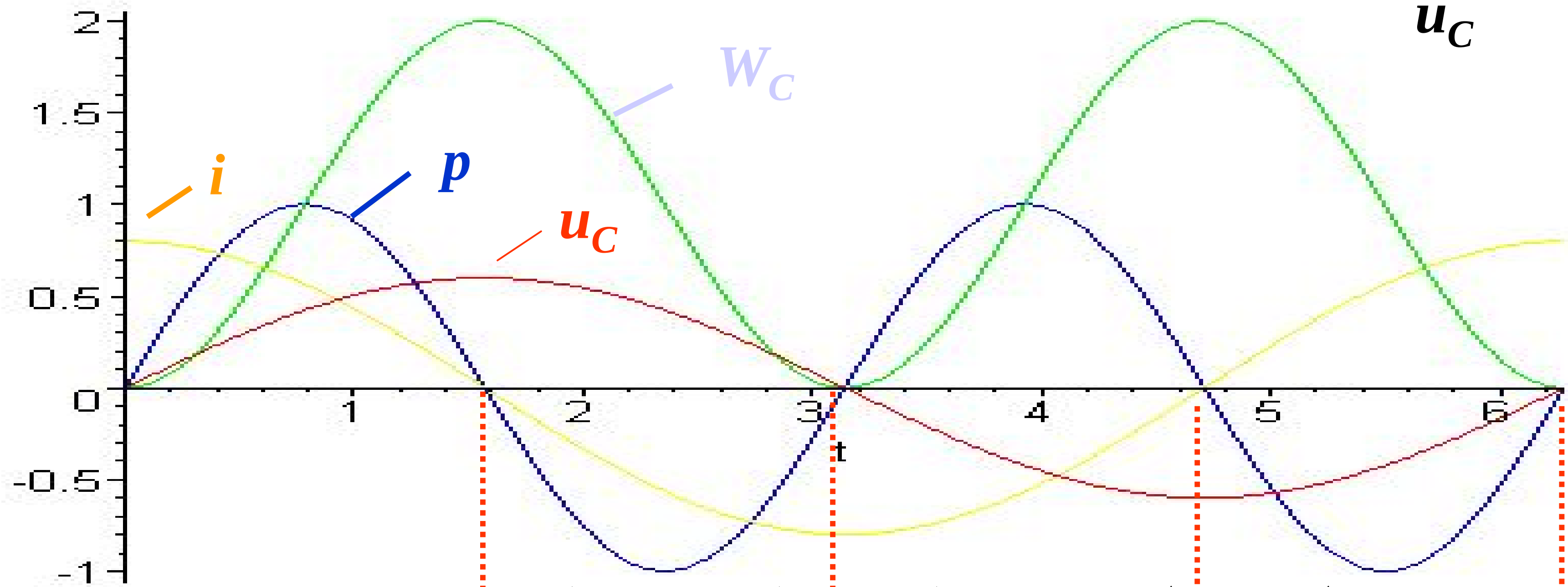
1）瞬时功率

$$p = u_C i_C = \sqrt{2}U_C \sin\omega t \sqrt{2}I_C \sin(\omega t + 90^\circ)$$

$$= U_C I_C \sin 2\omega t$$

波形图





$0 \le t < T/4$ | $T/4 \le t < T/2$ | $T/2 \le t < 3T/4$ | $3T/4 \le t < T$

吸收功率 | 发出功率 | 吸收功率 | 发出功率

2)平均功率

$$P=\frac{1}{T}\int_0^T p\,dt=\frac{1}{T}\int_0^T (UI\sin 2\omega t)dt=0$$

3)能量

$$W_C=\frac{1}{2}Cu_C^2=\frac{1}{2}C\left[\sqrt{2}U_C\sin\omega t\right]^2$$ 本身不消耗能量

$$=\frac{1}{2}CU_C^2(1-\cos 2\omega t)$$

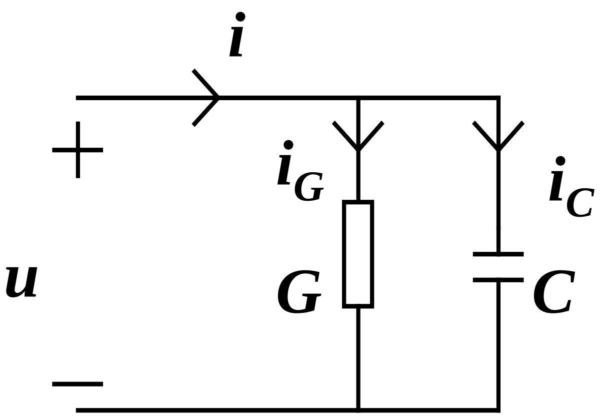
4)电容元件的无功功率

$$Q_C=U_CI_C=I_C^2X_C=U_C^2B_C$$

电容元件本身并不消耗功率，而是与电路其他部分交换功率。通常用无功功率表示电容元件与电路其他部分功率交换的幅值，这个幅值称为电容元件的无功功率。单位：乏 VAR。虽然与功率具有相同的量纲，但不代表电容消耗功率 。

4.实际电容器

实际电容器两个极板之间的绝缘不够理想，则电容器中除了储存电场能外，还有漏电流，通常用 G-C 并联电路来等效一个绝缘不够理想的实际电容器



$$i = i_G + i_C$$

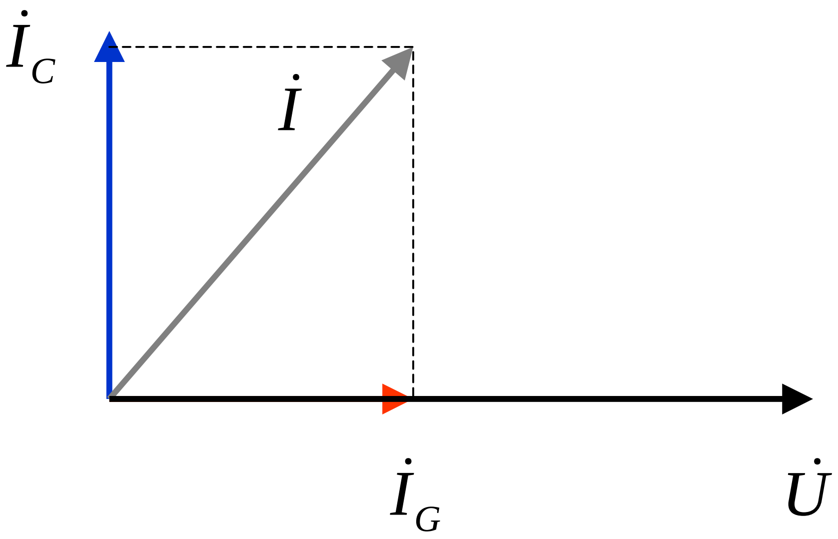
$$\dot{I} = \dot{I}_G + \dot{I}_C$$

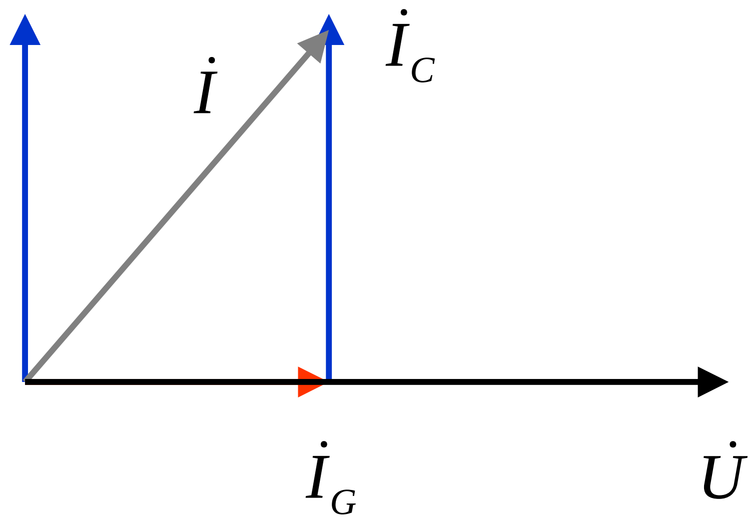
$$= \dot{U}\left(G + j\omega C\right)$$

$$\frac{\dot{I}}{\dot{U}} = G + j\omega C = Y$$ 复数导纳Y

复数导纳Y ：实部为电导，虚部为电纳。

相量图，以 $\dot{U}$ 作为参考相量





例1:一个理想电容 $C = 4.75uF$ $u_C = 10\sqrt{2}\sin\omega t$

(a) $f = 50Hz$ (b) $f = 5000Hz$ 求 ***ic*** ?

解： (a) $f = 50Hz$ $\omega = 2\pi f = 314\,rad/s$

$$B_C = \omega C = 2\pi f C = 314 \times 4.75 \times 10^{-6} = 15 \times 10^{-4}(S)$$

$$\dot{I}_C = j\omega C\dot{U}_C = jB_C\dot{U}_C = j0.015\,(A) \qquad i_C = 0.015\sqrt{2}\sin(\omega t + 90^\circ)A$$

(b) $f = 5000Hz$ $\omega = 2\pi f = 31400\,rad/s$

$$B_C = \omega C = 314 \times 10^2 \times 4.75 \times 10^{-6} = 0.15(S)$$

$$\dot{I}_C = jB_C\dot{U}_C = j1.5\,(A) \qquad i_C = 1.5\sqrt{2}\sin(\omega t + 90^\circ)A$$

例2:有一个非理想电容，测得其电导 $G = 0.00312S$，当加上 $U = 10V$, $\omega = 314 rad/s$ 正弦电压时，测得 $I = 0.1A$

求: ***C*=?** 以电压为参考相量，写出 ***i*** 的时间函数。

解：

$$\frac{\dot{I}}{\dot{U}} = G + j\omega C = Y \qquad \frac{I}{U} = y = \sqrt{G^2 + (\omega C)^2}$$

$$0.01^2 = 0.00312^2 + (\omega C)^2 \qquad C = 30.3uF$$

$$\dot{I} = Y\dot{U} = (0.00312 + j314 \times 30.3 \times 10^{-6}) \cdot 10\angle 0^\circ$$

$$= 0.1\angle 71.8^\circ$$

$$i = 0.1\sqrt{2}\sin\left(314t + 71.8^\circ\right)A$$