

引言

滤波器是一种二端口网络。它具有选择频率的特性,即可以让某些频率顺利通过,而对其它频率则加以阻拦,目前由于在雷达、微波、通讯等部门,多频率工作越来越普遍,对分隔频率的要求也相应提高;所以需用大量的滤波器。再则,微波固体器件的应用对滤波器的发展也有推动作用,像参数放大器、微波固体倍频器、微波固体混频器等一类器件都是多频率工作的,都需用相应的滤波器。更何况,随着集成电路的迅速发展,近几年来,电子电路的构成完全改变了,电子设备日趋小型化。原来为处理模拟信号所不可缺少的 LC 型滤波器,在低频部分,将逐渐为有源滤波器和陶瓷滤波器所替代。在高频部分也出现了许多新型的滤波器,例如:螺旋振子滤波器、微带滤波器、交指型滤波器等等。虽然它们的设计方法各有自己的特殊之点,但是这些设计方法仍是以低频“综合法滤波器设计”为基础,再从中演变而成,我们要讲的波导滤波器就是一例。

通过这部分内容的学习,希望大家对复变函数在滤波器综合中的应用有所了解。同时也向大家说明:即使初看起来一件简单事情或一个简单的器件,当你深入地去研究它时,就会有许多意想不到的问题出现,解决这些问题并把它用数学形式来表示,这就是我们的任务。谁对事物研究得越深,谁能提出的问题就越多,或者说谁能解决的问题就越多,微波滤波器的实例就能很好的说明这个情况。我们把整个问题不断地“化整为零”,然后逐个地加以解决,最后再把它们合在一起,也就解决了大问题。这讲义还没有对各个问题都进行详细分析,由此可知提出问题的重要性。希望大家都来试试。

第一部分 滤波器设计

§1-1 滤波器的基本概念

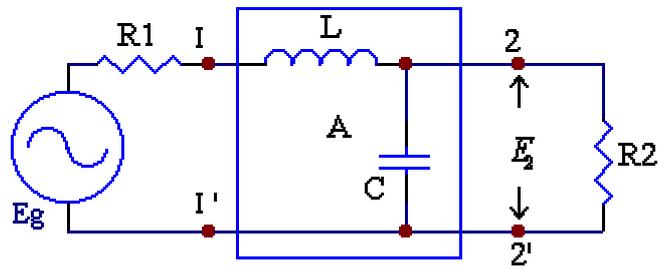


图 1

图 1 的虚线方框里面是一个由电抗元件 L 和 C 组成的两端口。它的输入端 $1-1'$ 与电源相接，其电动势为 E_g ，内阻为 R_1 。二端口网络的输出端 $2-2'$ 与负载 R_2 相接，当电源的频率为零（直流）或较低时，感抗 $j\omega L$ 很小，负载 R_2 两端的电压降 E_2 比较大（当然这也就是说负载 R_2 可以得到比较大的功率）。

但是，当电流的频率很高时，一方面感抗 $j\omega L$ 变得很大，另一方面容抗 $-j/\omega C$ 却很小，电感 L 上有一个很大的压降，电容 C 又几乎把 R_2 短路，所以，纵然电源的电动势 E_g 保持不变，负载 R_2 两端的压降 E_2 也接近于零。换句话说， R_2 不能从电源取得多少功率。网络会让低频信号顺利通过，到达 R_2 ，但阻拦了高频信号，使 R_2 不受它们的作用，那些被网络 A （或其他滤波器）顺利通过的频率构成一个“通带”，而那些受网络 A 阻拦的频率构成一个“止带”，通带和止带相接频率称为截止频率。

什么机理使网络 A 具有阻止高频功率通过的能力呢？网络 A 是由电抗元件组成的，而电抗元件是不消耗功率的，所以，高频功率并没有被网络 A 吸收，在图一所示的具体情况中，它有时贮存于电感 L 的周围，作为磁能；在另一些时间，它又由电感 L 交还给电源。如果 L 和 C 都是无损元件（即它们的电阻等于零），那么，高频功率就是这样在电感与电源之间来回交换，丝毫不受损耗，这就是电抗滤波器阻止一些频率通过的物理基础。从这个意义来说，我们可以认为滤波器将止带频率的功率发射回电源去，同时也是因为这个关系，在止带内滤波器的输入阻抗是纯电抗性的。

图一的网络 A 是一个很简单的滤波电路，它的滤波效能是比较低的，在许多场合下，往往不能满足技术上的要求，而不得不采取更复杂的电路结构。然而，不管电路结构如何复杂，滤波作用的物理根源还是和前面所说的完全一样。

滤波作用是滤波网络所具有的内在特性，但滤波网络所能起到的作用还受外界因素（电源内阻 R_1 和负载电阻 R_2 ）的影响。滤波效能首先决定于滤波器的内在特性（这是主要的），同时还决定于滤波器的外加阻抗（这也是不可忽略的）。那么，滤波器效能是用什么来衡量的呢？图二(a) 表示一个电源，它的电动势为 E_g ，内阻为 R_1 。设负载为 R_2 ，则当负载直接与电源相接时，它所能吸收的功率 P_{02} 为：

$$P_{02} = \frac{R_2}{(R_1 + R_2)^2} E_g^2$$

现在我们将滤波器 A 接于电源与负载之间,如图二(b) 所示,由于滤波器的特性,当电源频率变化时,出现于 R_2 两端的压降 E_2 是不同的,即 R_2 从电源所取得的功率 $P_2 = E_2^2 / R_2$ 在不同频率上是不等的。用分贝来表示的 P_{02} 与 P_2 的比值称为插入损耗 L_i :

$$L_i = 10 \log \frac{P_{02}}{P_2} \quad (1)$$

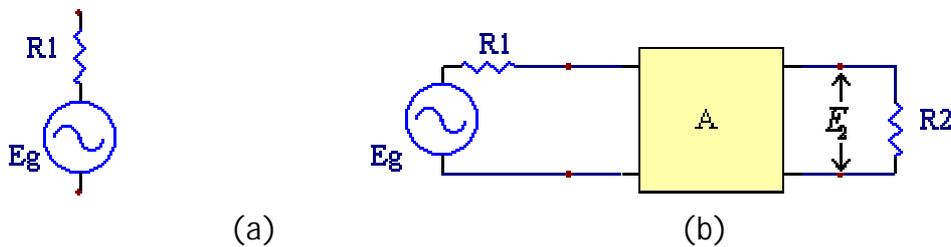


图 2

插入损耗 L_i 是衡量滤波器效能的一个参数。根据上面的讨论,显然可见,一个良好的滤波器的插入损耗在通带内应该比较低,而在止带内应该比较高。理想的滤波器的插入损耗在通带内应该等于零,而在止带内应该是无穷大。

插入损耗是普通滤波器常用的参数。滤波网络具有的阻抗变换特性不难使负载 R_2 在整个通带内与电源达成匹配。这时,负荷所吸收的功率将超过 P_{02} ,而使 L_i 取得负值。根据 R_1 和 R_2 的比值不同, L_i 的这个负值也不一样。因此,插入损耗 L_i 并不是一个很方便的比较基准。为了避免这种困难,人们还提出另外一个参数,它以电源所能供给的最大功率 P_0 为基准。从电工基础我们知道:

$$P_0 = E_g^2 / 4R_1$$

P_1 与 P_0 的比值，如以分贝来表示，称为变换器损耗 L_A (Transducer Loss):

$$L_A = 10 \lg \frac{P_0}{P_2}$$

根据以上给出的种种关系，可以算出：

$$L_A = L_i + 10 \lg \frac{(R_1 + R_2)^2}{4R_1R_2} \text{ (db)} \quad (2)$$

从上式显然可见，当 $R_2 = R_1$ 时，变换器损耗就是插入损耗。有些参考书上，这两者是混为一谈的。

必须注意，在(2) 式中，当频率变化时， P_2 是跟着变化的。在理想的情况下，滤波器的变换器损耗 L_A 在通带内应该是零，而在止带内则应该具有比较大的数值。根据滤波器的具体电路结构，变换器损耗与频率保持有各种不同的关系。图三给出四种典型关系，在这些图中，横坐标表示频率，纵坐标表示变换器损耗 L_A 。(a)表示有关器件顺利通过低于 f_1 的频率，而阻碍高于 f_1 的频率通过；这样的器件称为低通滤波器 (LP - Low Pass)。 (b)的情况正好相反，称为高通滤波器 (HP - High Pass)。 (c) 表示有关器件顺利通过 f_1 至 f_2 之间的频率，对于低于 f_1 或高于 f_2 的频率都阻碍它们通过；这样的器件称为带通滤波器 (BP-Band Pass)。 (d)是(c)的对立面，它阻止 f_1 至 f_2 之间的频率通过，称为带阻滤波器 (BS - Band Suppress)。这些不同的频率特性取决于电路的具体结构，图四给出以上四种滤波器的基本结构形式，各个元件的数值是和变换器衰减的频率特性以及所接负载密切联系着的。

骤然看来，这四种电路结构是很不相同的，似乎各自应有各自的设计方法。其实不然，通过一些数学方法，人们可以把这四种滤波器电路结构完全统一起来，这里用到的数学方法叫作“频率变换”。应用频率变换法，其它三种滤波器都可以看作低通滤波器，在设计时，先从它对应的低通滤波器着手(因为这样简单得多)，在获得低通滤波器的设计数据以后，再用频率变换法，求得所要设计的滤波器的

数据。因为这个关系，满足设计技术要求的低通滤波器称为“母型滤波器”或“原型滤波器”（prototype）。

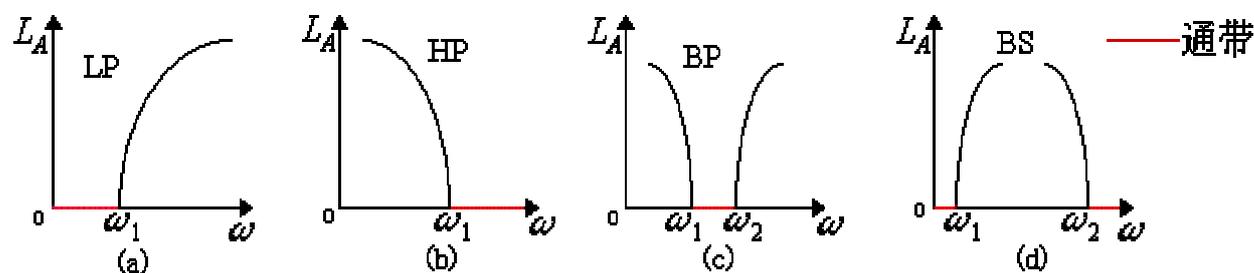


图 3

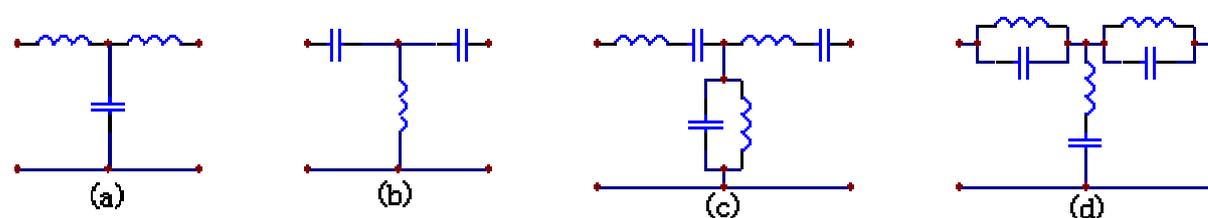


图 4

上面提出了衡量滤波器效能的参数——变换器损耗 L_A ，但是，效能好坏的准则又是什么呢？在实际滤波器中，变换器损耗的频率特性往往不像图三那样理想。首先，从通带过渡到止带， L_A 是慢慢增加的，所以，衡量滤波器效能好坏的有关标准是：从通带过渡到止带时， L_A 曲线的上升要陡峭。其次在通带内，变换器损耗不是完全不存在的，一方面因为构成滤波器的元件多少总带有一点损耗，如电感中的电阻，电容中的漏阻等。另一方面，由于设计上的考虑，有时故意要 L_A 在通带内不能完全为零。故衡量滤波器效能的另一准则是：在 L_A 曲线从通带过渡到止带的上升程度相同的情况下， L_A 在通带内的大小究竟怎样。

对以上两点的要求越高，滤波器所需用的元件越多，这将带来生产工作和造价的增加。所以，对于实际设计，应根据具体情况进行全面的考虑，只要滤波性能能够满足所提出的要求，那便没有追求 L_A 曲线上升过分陡峭的必要。问题在于能够完成任务，这也就是我国老话“杀鸡用不着牛刀”的意思。

第一部分 滤波器设计

§1-2 滤波器设计的两种出发点

滤波器的设计当前有两种不同的出发点。

一种称为镜象参数法。它以滤波网络的内在特性为根据。是人们一向用来设计滤波器的老办法。这种方法的特点是：根据滤波网络的具体电路，用分析的方法推算出变换器损耗的特性。然后再将这些具体电路拼凑起来，使总的 L_A 特性满足所需要的技术要求。用这种方法设计出来的滤波器一般为 K 式滤波器和 m 式滤波器等。这种方法的优点是理论根据简单。它的缺点是在分析过程中没有考虑外接负载的影响，故在具体的设计要求提出后，需要反复试探，才能得到设计结果；这对于缺乏经验的工作人员来说，是颇费时间的。

另一种方法从插入损耗入手，它是近年来应用的很多的设计方法。这种方法的特点是：根据所提出的技术要求，决定插入损耗 L_i (在 $R_2=R_1$ 时也就是变换器损耗 L_A) 与频率的函数关系，然后根据这个函数关系，应用网络理论综合出具体的电路结构。所以这种方法和前面的一种方法正好是相反的；这种方法根据要求推求电路，而镜象参数法则是应用已知的特性电路拼凑出满足要求的结构。这种方法的优点是设计准确，而且设计是已经考虑到外接负载的影响，无需经过多次试探的手续。它的缺点是需要用到比较难深的网络理论。但是，这个缺点是可以弥补的，因为只要一当把满足各种要求的母型滤波器设计出来以后，后来的设计手续变成了简单的查表读图和应用浅近数学方法换算数据，从实用角度来说比镜象参数法还要简单得多。

第一部分 滤波器设计

§1-3 综合法滤波器

引言--恩格斯说过：“没有分析就没有综合”。要讨论综合法滤波器就需要从分析滤波器入手。综合法滤波器设计又名插入损耗法。这就是说插入损耗是该设计法的核心。现在需要弄清楚什么是网络分析和什么是网络综合？

网络分析--给出一个具体网络，要我们求出这个网络的传递函数。

网络综合--它是网络分析的逆过程。给出一个具体的传递函数，要我们求出这个网络的电路形式和各种元件的数值。

网络综合的确比分析一个具体电路要复杂得多。而且涉及的数学公式又多又难。但是它又是一个把数学用于工程问题的一个极好例子。所以我们还是决定详细地讲一讲。我们相信这会对同学们有好处的。

(一) 二端对网络的电压传递函数

工程设计中遇到的实际电路，大多可以用图五所示的二端对网络来表示。图五的左方代表一个实际的电压源， E_g 是它的电动势， R_1 是它的内阻。右边的 R_2 代表负载。根据问题的不同 R_1 和 R_2 可以取得种种不同的数值，因为人们需要解决的实际问题是多种多样的。

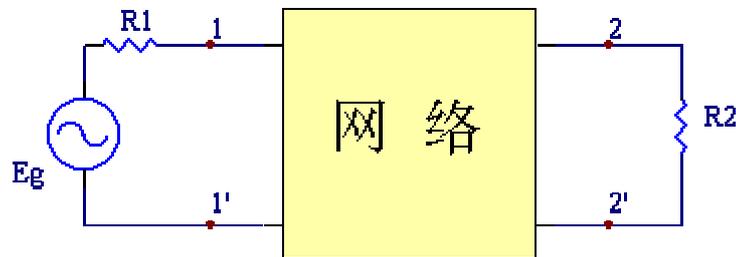


图 5

这样的两端对网络主要是用作传输系统。既然如此，人们首先注意的问题是：它在外力作用下，输出端会产生什么效果。譬如说，当输入端 1-1' 加上激励电压 E_g 或送进激励电流 I_1 时，接于网络输出端 2-2' 的端载 R_2 上的电压 E_2 或流过 R_2 上的电流 I_2 都是很重要的响应，我们把 E_g/E_2 之比称为传递函数。

学过两端对网络理论，我们当然就希望用网络理论来推导这个电压传递函数。考虑到网络内元件的复杂性，我们就用通用矩阵 $[a]$ 来推导这个传递函数。

图五所示结构用 $[a]$ 矩阵的参数来表示：根据 $[a]$ 矩阵的定义：

$$E_1 = AE_2 + BI_2$$

$$I_1 = CE_2 + DI_2$$

先求 2-2' 端接上负载 R_2 时，1-1' 端的输入阻抗 Z_{in} ：

$$Z_{in} = \frac{E_1}{I_1} = \frac{AE_2 + BI_2}{CE_2 + DI_2} = \frac{\left[A\left(\frac{E_2}{I_2}\right) + B \right] I_2}{\left[C\left(\frac{E_2}{I_2}\right) + D \right] I_2}$$

$$Z_{in} = \frac{AR_2 + B}{CR_2 + D}$$

这样图五所示的网络就转化为图 6 那样。该电路的电压和电流的关系式是很容易求得的。

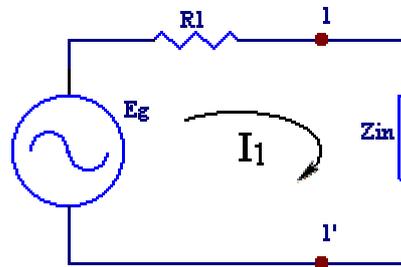


图 6

$$E_g = R_1 I_1 + Z_{in} I_1 = I_1 \left(R_1 + \frac{AR_2 + B}{CR_2 + D} \right)$$

$$= I_1 \left(\frac{AR_2 + B + CR_1 R_2 + DR_1}{CR_2 + D} \right)$$

$$= (CR_2 + D) I_2 \times \left(\frac{AR_2 + B + CR_1 R_2 + DR_1}{CR_2 + D} \right)$$

$$\frac{E_g}{E_2} = \frac{AR_2 + B + CR_1 R_2 + DR_1}{R_2}$$

当 $R_1 = R_2 = 1$ 时，

$$\frac{E_g}{E_2} = A + B + C + D$$

(3)

因为，对于纯电抗网络，当频率 $j\omega$ 时，只有 B 和 C 是纯虚数，而 A 和 D 是实数。

所以， $\frac{E_g}{E_2}$ 就是一个复数。于是又可以把它表示为：

$$\frac{E_g}{E_2} = \left| \frac{E_g}{E_2} \right| e^{j\theta} = A(\omega) e^{j\varphi(\omega)}$$

这个公式(3)是极其重要的一个关系式，它所满足的条件在我们一般要讨论的问题中，很容易达到 $R_1 = R_2$ 。这是因为：作为一个传输系统总是希望把大部分功率传到负载上去的，所以总是想尽办法使电流和负载匹配。

这里要提的另一个问题是：为什么在公式的推导中，用的是 $R_1 = R_2 = 1$ ，而不是具体值。 $R_1 = R_2 = 300, 25, 75$ 呢？回答是：这样可以简化我们的讨论。这也是网络分析的一个极重要的结论----阻抗归一化。

(二) 电压传递函数的阻抗归一化

人们对大量的具体电压传递函数进行分析后，总结出一个重要的特性。如果网络中的每个独立的阻抗乘上一个常数因子 A 后，那么，这个网络的电压传递函数保持不变。

考虑到以后的实际情况，我们用带撇“'”的 R' 、 C' 和 L' 来表示已归一化的元件值，单位分别是欧姆、法拉和亨利，而用不带撇的 R 、 C 和 L 表示实际电路的元件值。具体来说：

$$\text{对于电阻值： } R = AR'$$

$$\text{对于电容值： } C_K = \frac{1}{A} C'_K$$

$$\text{对于电感值： } L_K = \frac{1}{A} L'_K$$

这个结论可以用实际例子来说明：

给我们两个如图 7(a)(b)所示的网络，要我们分别求出其各自的电压传递函数，按照电工原理，我们可以求出它们的电压传递函数：

对于图 7(a)所示的网络，我们先求出其回路电流 I_1 ：

$$I_1 = \frac{E_g}{50 + 50 + j100\omega}$$

$$E_2 = I_1 R_2 = \frac{E_g}{50(2 + j2\omega)} \times 50 = \frac{E_g}{2 + j2\omega}$$

于是

$$\frac{E_g}{E_2} = 2 + j2\omega$$

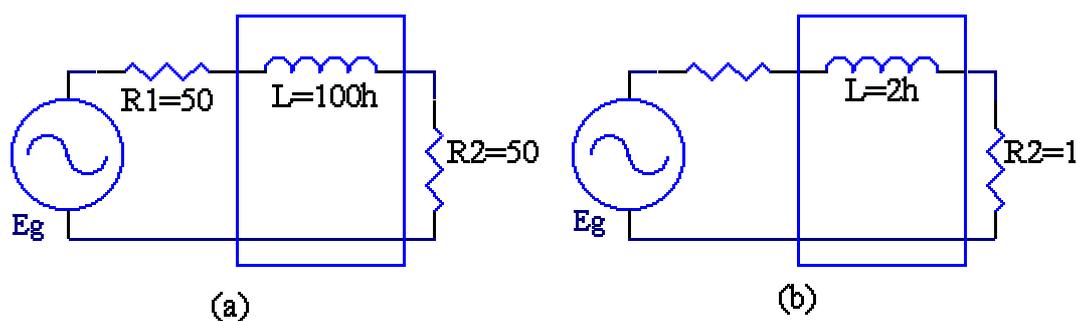


图 7

对于图 7(b)所示的网络，由于其 $R_1=R_2=1$ ，数简单，所以计算起来更加简洁：

$$I_1 = \frac{E_g}{1+1+j2\omega} = \frac{E_g}{2+j2\omega}$$

$$E_2 = I_1 R_2 = \frac{E_g}{2+j2\omega} \times 1 = \frac{E_g}{2+j2\omega}$$

于是

$$\frac{E_g}{E_2} = 2 + j2\omega$$

由此可见这两个电路的电压传递函数是一样的。图 7(b)的电路的各元件值只是图 7(a)的电路中各元件的阻抗值扩大了 50 倍的反映。所以，这两个电路只有绝对阻抗大小的差别，而对电压分配比是一样的。这样，我们就可以把阻抗之间的相对比例一样的网络归为一类。仅仅研究它的归一化后的电路的特性，别的阻抗值的电路，都可以从它导出。

(三) 电压传递函数的频率归一化

受到上述的好处以后，我们很自然地会想到不同的频率工作的电路，其电压传递函数是否也能归类，研究的结果是可行的。其结论如下：

如果把工作频率从 $\omega = 1$ 弧度/秒升高到 $\omega = B$ 弧度/秒，让该网络的所有电阻保持不变，而把网络中的所有电感 L 和电容 C 都除以 B ，那么，变换后的电路的电压传递函数没有变化。

这是很自然的，它好像物理量的单位换算，其基本的道理仍然是使网络各元件的阻抗之比保持不变。

对于电阻，因为它和工作频率无关，所以工作频率变化，不影响它的值。

对于电容的电感，则有：

$$X_L = \omega' L' = \omega L = \omega' B \times \frac{1}{B} L'$$

$$\text{其中 } \omega = B\omega' \quad L = \frac{1}{B} L'$$

$$X_C = \frac{1}{\omega' C'} = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{\omega' B \cdot \frac{C'}{B}}$$

$$\text{其中 } \omega = B\omega' \quad C = \frac{1}{B} C'$$

这个结论也可以用实际例子来说明：

让我们仍以图 7(b)为例：设 $\omega = 1$ 弧度/秒，则有

$$\frac{E_g}{E_2} = 2 + j2\omega = 2 + j2$$

接着我们来看看，若把 $\omega = 2$ 弧度/秒代入，又要保持其电压传递函数不变，只有改变电路中的电感值，它该是多少呢？图 7(b) 的电压传递函数为

$$\frac{E_g}{E_2} = 2 + j\omega L = 2 + j2 \cdot L$$

于是，满足保持电路的电压传递函数不变的

可能，只是 $L = 1^h$ ，这正好就是从原来电感 L 除以频率提高的倍数 2，其最后的具体结构如图 8 所示。

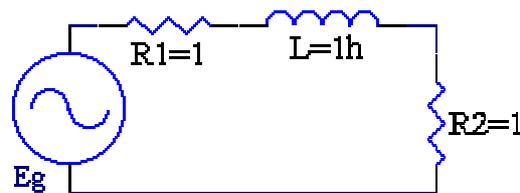


图 8

阻抗归一化和频率归一化的概念在网络理论中极为重要。因为，今后列表中的各种元件值都是以阻抗归一化和频率归一化后的元件值。各种具体阻抗和工作频率时的具体都由它们导出。

人们能把这两个法则合在一起，从而能一下子同时去掉这两个归一化。因此，对于一个已归一化的电路，要让它们阻抗提高 A 倍，频率提高 B 倍，那么人们就有：

每个网络中的电阻乘上 A

每个网络中的电感乘上 A/B

每个网络中的电容乘上 $1/AB$

如果一个设计有大量的元件，这个最后式是有用的。但是，我们推荐大家研究这两个基本概念。如果大家理解了 this 原理，从这两个基本法则是很容易推论出像上式那样的公式。因为，上列的特定的结构是很容易忘记或记错的。

(四) 各种频率特性的滤波器的归一化

在引言中，我们曾谈到有各种不同衰减特性的滤波器：低通、高通、带通和带阻，而且通过数学上的变量代换，可以把它们归并为一个低通归一化原型滤波器。若从数学变换的角度看，上述的电压传递函数的频率归一化也属频率变换。这里要讲的实际就是从母型滤波器的数据推求实际滤波器网络的具体结构。

(1) 频率扩展(频率归一化)母型低通滤波器的截止频率 $\omega_c = 1$ 。假如需要设计的低通滤波器的截止频率不等于 1，而是 ω_c ，则从数学角度说相当于将原来的频率轴 ω 倍乘了

故 $\omega = \omega_c \omega'$

亦
即

$$\omega' = \omega / \omega_c$$

图 9(a)表示两个频率轴之间的关系, (b)表示母型低通滤波器的 $L_A \sim \omega'$ 关系, (c)表示换算后 $L_A \sim \omega$ 之间的关系。在(b)和(c)的图形上, 我们还把负频率部分画上。负频率实际上当然不是客观存在的, 但从数学的观点来说, 它还是可以和 L_A 保持一定的函数关系。这两个图形表明 L_A 和频率保持有偶函数的关系, 这是由上面所提到的可实现性决定的。进行这种频率变换时, 设计电路的元件也跟着改变, 其变化规律前小节已经说过了。

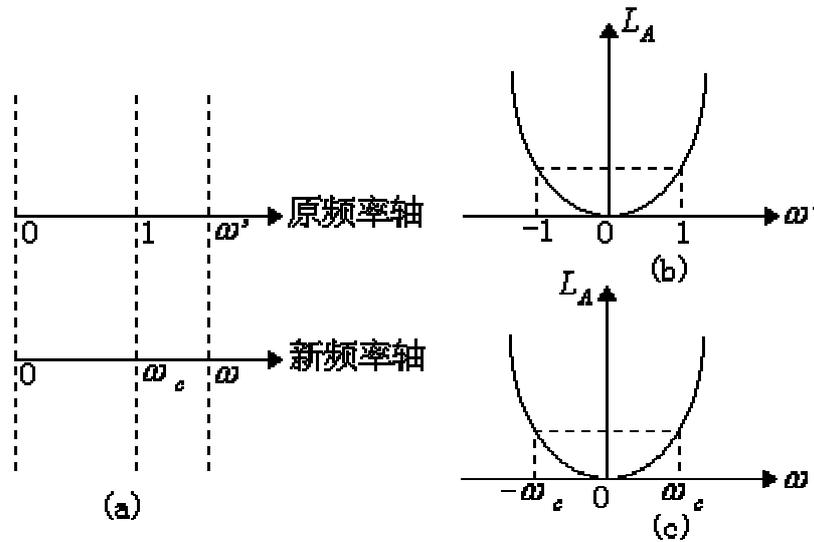


图 9

(2) 低通转高通----如需要设计一个高通滤波器(参看图 10), 它的截止频率是

ω_c , 人们使新的频率变量 ω 与原来的 ω' 保持下列关系:

$$\omega = -\frac{\omega_c}{\omega'}$$

图 10 在频率轴上表明这种转换关系。应用数学上的手法人们设计高通滤波器时, 实是利用了母型低通滤波器的负频率部分。所以要用这一部分也可实现性决定的数学方法的运用必须切合实际, 绝不能脱离实际进行数学游戏。

由母型低通滤波器换算到高通滤波器时, 电路元件当然要改变: 母型滤波器电感应改为电容, 其数值

$$C_K = \frac{1}{\omega_c L_{K'}}$$

母型滤波器的电容应改为电感，其数值

$$L_{K+1} = \frac{1}{\omega_c C_{K+1}'}$$

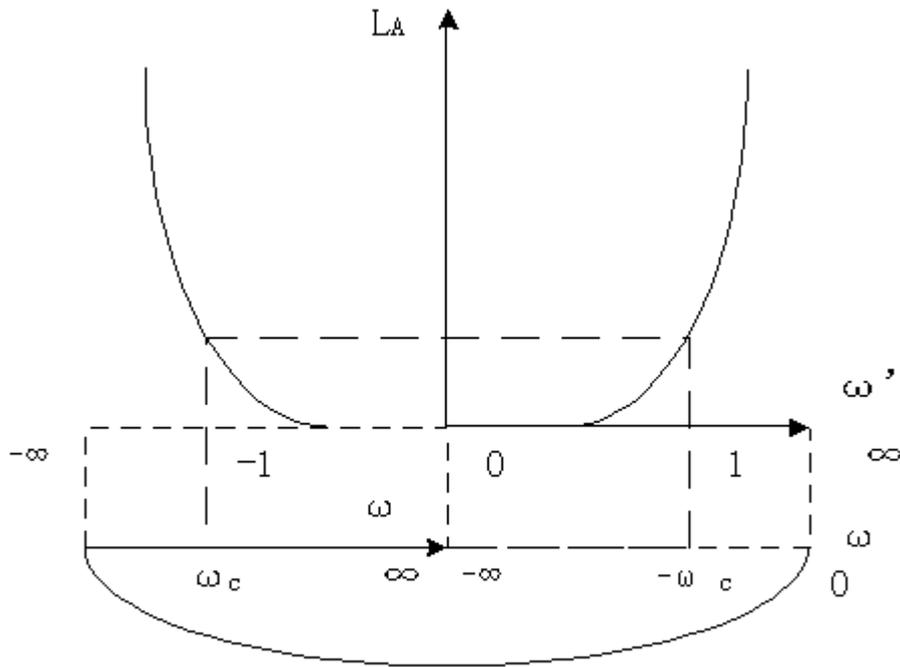


图 10

以后可以知道， L'_k 和 C'_{k+1} 都是表上查得的母型低通滤波器的元件参数。

(3) 低通转带通--如果要根据低通滤波器设计一个带通滤波器(参看图 11)，的截止频率是 ω_1 和 ω_2 ，人们需要进行更复杂些的频率变换，使母型滤波器的频变量 ω' 与带通滤波器的频率变量 ω 保持以下关系：

$$\omega' = \frac{\omega_0}{\omega_2 - \omega_1} \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)$$

(4)

式中 ω_2 为带通滤波器的高端截止频率, ω_1 为低端截止频率, ω_0 称为中央频率;
通常令

$$\omega_0 = \sqrt{\omega_1 \omega_2}$$

$\omega_2 - \omega_1$ 为带通滤波器的通频带, $\frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_0}$ 称为滤波器的相对通频带
W:

$$W = \frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_0}$$

W 通常以百分比表示, 故(4)式可以改写成

$$\omega' = \frac{1}{W} \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)$$

(5)

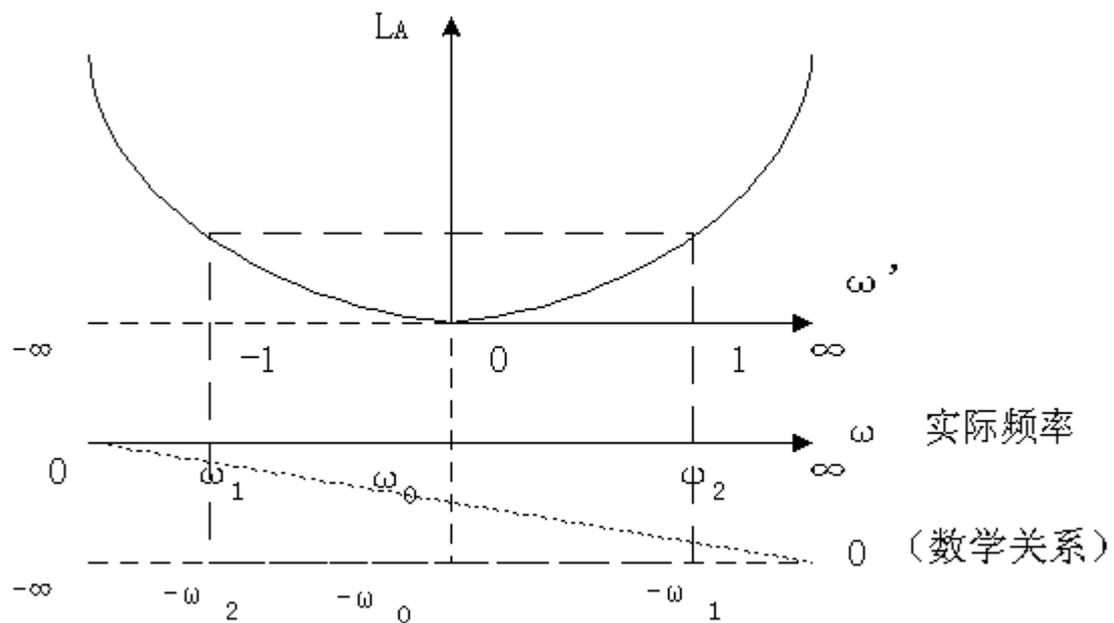


图 11

由式(5)求 ω ，经过演算和分析，人们可以得到母型滤波器的频率轴与新频率轴的关系(见图 11)。

根据母型低通滤波器换算带通滤波器，电路元件变得更加复杂。母型滤波器的电感应改为 LC 串联电路，它的电感 L_k 和电容 C_k 与母型的电感 L'_k 保持以下关系：

$$L_K = \frac{L'_K}{\omega_2 - \omega_1}$$
$$L_K C_K = \frac{1}{\omega_0^2}$$

母型滤波器的电容应改为 LC 并联电路，它的电容 C_{k+1} 和电感 L_{k+1} 与母型的电容 C'_{k+1} 保持以下关系：

$$C_{K+1} = \frac{C'_{K+1}}{\omega_2 - \omega_1}$$
$$L_{K+1} C_{K+1} = \frac{1}{\omega_0^2}$$

L'_k 和 C'_{k+1} 都可以从母型低通滤波器的元件表上查得。低通带止的问题，这里不再赘述了。我们把以上各种转换关系综合在表 1 上，表内还列出了低通转带止所用到 的关系。

第一部分 滤波器设计

§ 1-4 低通滤波器的定量分析

经过上一节的学习，我们已经了解到对于某些具体电路的分析。可以通过它们的归一化低通滤波器来进行。下面，我们来分析一到三节归一化低通滤波器。

(一) 一节低通滤波器

图 12 示出了它的结构，用电路分析，很快就可以求出：回路电流 I_1 为：

$$I_1 = \frac{E_g}{2 + j\omega L}$$

$$E_2 = I_1 R_2 = \frac{E_g}{2 + j\omega L} \times 1$$

$$\frac{E_g}{E_2} = 2 + j\omega L$$

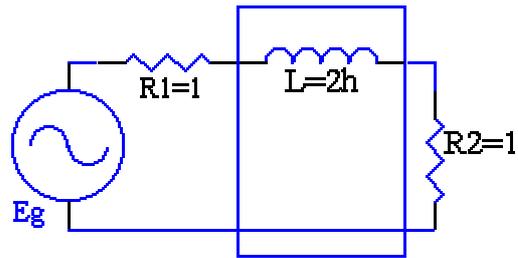


图 12

若用通用矩阵 $[a]$ 来求，此电路的通用矩阵为

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & j\omega L \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\because B_1 = B_2 = 1\Omega$$

$$\therefore \frac{E_g}{E_2} = A + B + C + D = 2 + j\omega L$$

和电路分析求出的结果完全一样。不过，从过程中可以看出：后一种方法简洁很多。而且，当元件数目越多就越显出矩阵法的优越。我们在这里还要定义一个归一化幅度函数 $A(\omega)$ ：

$$A(\omega) = \frac{\left| \frac{E_g}{E_2} \right|}{2} = \frac{A'(\omega)}{2}$$

这主要是因为传递到负载的功率，不是指电源总的输出功率，而是指最大输出

功率 $\frac{E_g^2}{4}$ ，而不是 $\frac{E_g^2}{2}$ ，这样就差了一个系数。所以一节低通滤波器的幅度函数 $A(\omega)$ ：

$$A(\omega) = \frac{|E_g|}{|E_2|} = \left| \frac{2 + j\omega L}{2} \right| = \sqrt{1 + \frac{\omega^2 L^2}{4}}$$

$$A^2(\omega) = 1 + \frac{\omega^2 L^2}{4} = 1 + B_1 \omega^2$$

(二) 二节低通滤波器

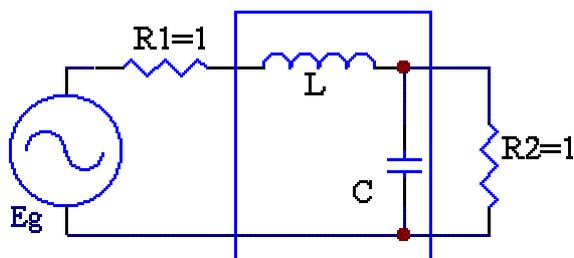


图 13

图 13 示出了它的结构，用电路分析解，就比较复杂了，如何解，留给同学们作练习，我们下面用通用矩阵来解它：

$$[a] = \begin{bmatrix} 1 & j\omega L \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ j\omega L & 1 \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} 1 - \omega^2 LC & j\omega L \\ j\omega C & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{又} \because R_1 = R_2 = 1\Omega$$

$$\frac{E_g}{E_2} = A + B + C + D$$

$$= 2 - \omega^2 LC + j\omega L + j\omega C$$

$$A^2(\omega) = \frac{(2 - \omega^2 LC)^2}{4} + \omega^2 \frac{(L + C)^2}{4}$$

$$A^2(\omega) = 1 + \frac{(L - C)^2 \omega^2}{4} + \omega^4 \frac{L^2 C^2}{4} \\ = 1 + B_1 \omega^2 + B_2 \omega^4$$

(三) 三节低通滤波器

图 14 示出了它的结构，我们仍用用矩阵[a]来求它的电压传递函数，而把电路法求解留给同学来完成。

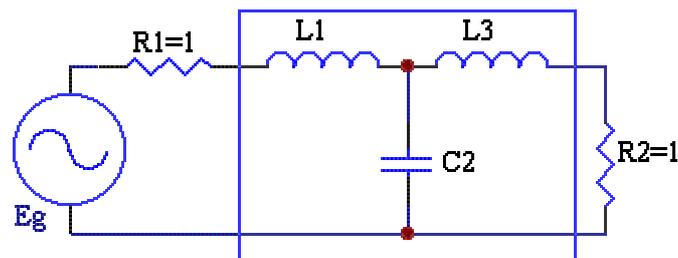


图 14

这时网络可以看成三个小两端对网络的节联，则有

$$\begin{aligned}
[\mathbf{a}] &= \begin{bmatrix} 1 & j\omega L_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ j\omega C_2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & j\omega L_3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 - \omega^2 L_1 C_1 & j\omega L_1 \\ j\omega C_2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & j\omega L_3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 - \omega^2 L_1 C_1 & (1 - \omega^2 L_1 C_1)j\omega L_3 + j\omega L_1 \\ j\omega C_2 & 1 - \omega^2 L_3 C_2 \end{bmatrix} \\
\frac{E_g}{E_2} &= 2 - \omega^2(L_1 C_2 + C_2 L_3) + j\omega(L_1 + L_3 + C_2) \\
&\quad - j\omega^3 L_1 C_2 L_3 \\
A^2(\omega) &= 1 - \frac{(L_1 + L_3 - C_2)^2}{4} \omega^2 + \frac{C_2 L_1^2 (C_2 - 2L_3)}{4} \omega^4 \\
&\quad + \frac{C_2 L_3^2 (C_2 - 2L_1)}{4} \omega^4 + \frac{L_1^2 C_2^2 L_3^2}{4} \omega^6 \\
A^2(\omega) &= 1 + B_1 \omega^2 + B_2 \omega^4 + B_3 \omega^6
\end{aligned}$$

(4) 对偶电路

上述一节三节低通滤波电路都有其对偶电路。我们把它们都画在图 15 上。它们各自的电压传递函数、幅度平方函数也可以求出如下：

一节对偶低通滤波器：

$$\begin{aligned}
[\mathbf{a}] &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ j\omega C & 1 \end{bmatrix} \\
\frac{E_g}{E_2} &= 2 + j\omega C \\
A^2(\omega) &= 1 + \frac{C}{4} \omega^2 \\
A^2(\omega) &= 1 + B_1 \omega^2
\end{aligned}$$

二节对偶低通滤波器：

$$[a] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ j\omega C_1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & j\omega L_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 1 & j\omega L_2 \\ j\omega C_1 & 1 - \omega^2 C_1 L_2 \end{bmatrix}$$

$$\frac{E_g}{E_2} = 2 - \omega^2 C_1 L_2 + j\omega(C_1 + L_2)$$

$$A^2(\omega) = 1 - \frac{(L_2 - C_2)^2}{4} \omega^2 + \frac{C_1^2 L_2^2}{4} \omega^4$$

$$A^2(\omega) = 1 + B_1 \omega^2 + B_2 \omega^4$$

三节对偶低通滤波器：

$$\begin{aligned}
 [a] &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ j\omega C_1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & j\omega L_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ j\omega C_3 & 1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & j\omega L_2 \\ j\omega C_1 & 1 - \omega^2 L_2 C_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ j\omega C_3 & 1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 1 - \omega^2 L_2 C_2 & j\omega L_2 \\ j\omega C_1 - j\omega^3 L_2 C_1 C_2 + j\omega C_2 & 1 - \omega^2 L_2 C_1 \end{bmatrix} \\
 \frac{E_g}{E_2} &= 2 - \omega^2(L_2 C_2 + L_2 C_1) - j\omega^2 L_2 C_1 C_2 + j\omega^3(L_2 + C_1 + C_2)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A^2(\omega) &= 1 + \frac{(C_1 + C_2 - L_2)^2}{4} \omega^2 + \frac{L_2 C_1^2 (L_2 - 2C_3)}{4} \omega^4 \\
 &\quad + \frac{L_2 C_3^2 (L_2 - 2C_1)}{4} \omega^4 + \frac{C_1^2 L_2^2 C_3^2}{4} \omega^6
 \end{aligned}$$

$$A^2(\omega) = 1 + B_1 \omega^2 + B_2 \omega^4 + B_3 \omega^6$$

从上面分析可以看出对偶电路各自电压传递函数是不变的，它们在传递能量的频率特性上是一样的。

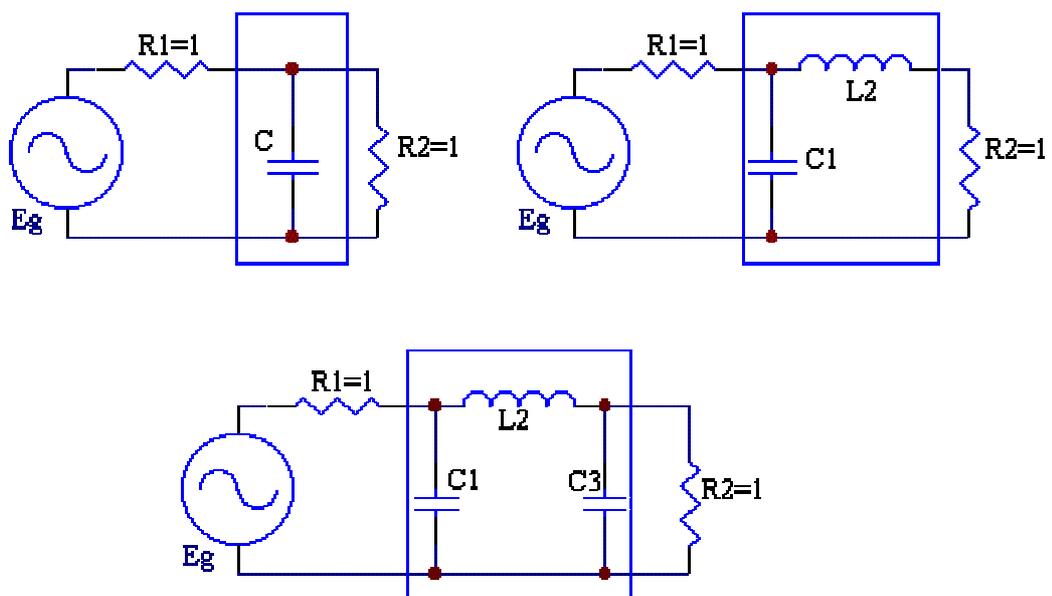


图 15

像这样一节一节地推下去最终就能导出像图 16 所示的梯形结构的低通滤波器。其幅度平方函数 $A^2(\omega)$ 的一般表示式为:

$$A^2(\omega) = 1 + B_1\omega^2 + B_2\omega^4 + B_3\omega^6 + \dots + B_n\omega^{2n}$$

其中 n 是滤波器的元件个数。

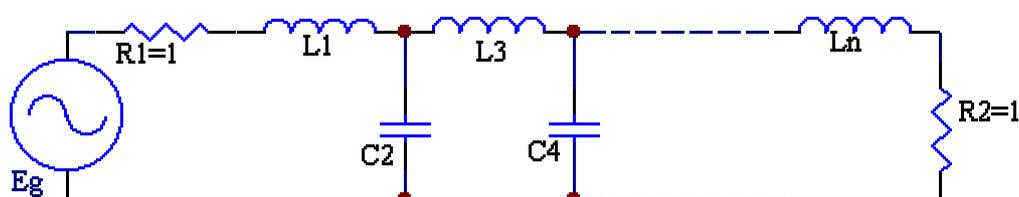


图 16

通过对低通滤波器进行定量分析以后, 得出两个极为重要的结论: (一) 一个特定的电压传递函数, 对应着两个具体电路, 这两个电路就是电工中的对偶电路。(二) 对于梯形结构的低通滤波器, 它的幅度平方函数可以表示为频率 ω 作参量的一个 $2n$ 阶的多项式。又因为 $A^2(\omega)$ 和插入损耗 L_i 有直接关系, 滤波器的综合又和多项式直接联系在一起, 所以也有人把综合法滤波器叫做多项式滤波器。

这两个结论的第二个更为重要, 因为它告诉我们梯形结构低通滤波器的电压传递函数, 和幅度平方函数是有规律的, 解析的。这就为我们提供了运用数学来解决问题的可能性。网络分析达到这一步就完成了它的使命。下一步就属网络综合的范畴。根据给出的衰减特性, 或衰减曲线来找具体的电路。

第一部分 滤波器设计

§ 1-5 低通滤波器的综合

(一) 引言

低通滤波器根据定义应该是：在通带内滤波器的变换器损耗 L_A 为零，而在止带内 L_A 应该无穷大。这是不可能实现的。一般来说，工程问题多大只有一个折衷解。照顾一方面，另一方面就得牺牲点，没有什么都好的。滤波器的综合也是这样，主要的指标有插入损耗，带外衰减，信号的时间迟延，信号的群迟延等。根据不同要求，给出不同的结果。这里就是一个近似问题。即用什么方法去尽量地近似理想的情况。同时也有一个是以哪种方式去近似。只有解决了这些问题，才能继续讨论具体的综合。加上近似理论对于以后的工作和学习都很有用。所以我们打算比较详细讲一讲这个问题。

(二) 近似问题

在讨论用一个函数近似地表达另一个给定函数(图形)之前，我们用自变量 x 代替无线电技术中的频率 ω 。这样做的目的是使讨论更有普遍意义。而且，近似常常是在经频率变换后进行的，故变量常不再是 ω 。假定 $g(x)$ 为 x 的函数，给定在 x 轴的 (a,b) 范围内，并令 $f(x)$ 为我们所要求的近似(实现)函数。函数 $g(x)$ 作为一个期望的幅度函数或者相位函数。它可能是以解析式给出，不过经常是以图形给出。 $f(x)$ 则是可实现的网络函数。假定 $g(x)$ 和 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内具有同样的性质。这样，它们在某一点 x_0 均可用台劳级数来展开。并设两个级数在区间 (a,b) 内均为收敛，则：

$$g(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots$$

$$f(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)^2 + \dots$$

近似的误差将为两者之差，即

$$g(x) - f(x) = (a_0 - b_0) + (a_1 - b_1)(x - x_0) + (a_2 - b_2)(x - x_0)^2 + \dots$$

如果两个级数的前 K 次系数逐项彼此相等，则 $f(x)$ 与 $g(x)$ 为 K 阶台劳型近似。在此情况下，误差函数将由 x 的第 $(K+1)$ 幂次项开始，即

$$g(x) - f(x) = (a_{K+1} - b_{K+1})(x - x_0)^{K+1} + \dots$$

上式就是 $x=x_0$ 处展开的台劳级数的误差函数。而且，可以看出：在 $x=x_0$ 处的误差函数的前 K 阶导数为零。这是台劳近似法的一个性质。其实我们可以得出如下定义：如果 $g(x)-f(x)$ 的前 K 阶导数在 $x=x_0$ 处为零，则 $f(x)$ 为 $g(x)$ 在 $x=x_0$ 处的 K 阶台劳近似式。

台劳型近似法中，在 $x=x_0$ 处误差为零；而随着 $x-x_0$ 的增大，误差增加。因而，这一近似法有利于接近 x_0 的所有 x 值，而不利于接近区域两端的点。其实这个近似仅在 x_0 点十分好，在这一点不仅两个函数完全相同，而且，它们的若干导数也完全相同。

如果，近似函数 $f(x)$ 沿给定函数 $g(x)$ 来回摆动，则两者的差将有峰值和谷值，某些峰值将是很大，而某些峰值则很小。 $f(x)$ 越复杂，即 $f(x)$ 的可调整参数越多，得到的近似就越好。假设，我们规定 $f(x)$ 有 n 个参数[例

如： $f(x) = 1 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_nx^n$ 为具有 n 个可调整系数的多项式]最佳近似的一种方法是这样。它使得误差函数的最大值降到最小。我们称此近似法为“切比雪夫近似法”。

由上可知，对一个函数 $g(x)$ 或图形进行近似，方法是多种的，上述的台劳级数近似法和切比雪夫近似法都是最常用的，此外还有一些近似法，如椭圆函数近似法。不过，不同的近似法有它各自的特点。所以就有选择的余地。

(三)最大平滑近似

图 17 示出了一个理想低通滤波器，其幅度和截止角频率 ω_c 都标称为 1。这个理想低通滤波器传递函数为

$$F_i(j\omega) = e^{-j\omega} \quad 0 \leq |\omega| \leq 1$$

$$F_i(j\omega) = 0 \quad |\omega| > 1$$

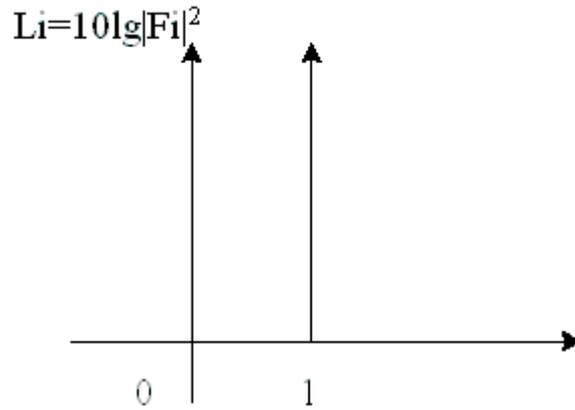


图 17

这样的理想特性是无法实现的，因为网络函数是一个有理函数，其幅度必须是连续平滑函数，而图 17 的特性则不然，它在 $\omega = 1$ 处要折转一个直角。因此，在综合过程中，需用近似方法求出一个有理函数来近似图 17 的特性。

一种简单的近似称为最平幅度特性近似。这一近似函数必须是有理函数，在通带内，即 $0 \leq |\omega| \leq 1$ 的范围内，幅度平方要近似于 1。而在通带之外，

即 $|\omega| > 1$ 的范围，幅度的平方逐渐趋于无穷大。首先，假定传递函数的无穷大点产生在频率等于 $\omega = 1$ 处，则有：

$$G(\omega^2) = |F_1(j\omega)|^2 = 1 + B_1\omega^2 + B_2\omega^4 + \cdots + B_n\omega^{2n}$$

其中指数 n 和系数 b 是待定的常数，它们的数值与所求的近似程度有关。在上式分母中的第一项的系数取为 1 是为了保证近似函数与给定函数在 $\omega = 0$ 时重合，在通带内误差函数为：

$$G_1(\omega^2) - G(\omega^2) = B_1\omega^2 + B_2\omega^4 + \cdots + B_n\omega^{2n}$$

用 $x = \omega^2$ 代入上式得

$$R(x) = G_1(x) - G(x) = B_1x + B_2x^2 + \cdots + B_nx^n$$

(6)

系数 B 的求法随所采用的近似类型而定。如果采用台劳型近似，则要求误差函数的前 n 阶导数在 x=0 时等于零。更确切地说，K 阶台劳型近似需要误差函数的第 K 阶导数之前的各阶导数等于零。

式(6)的第 K 阶导数之前的各导数当 x=0 时分别为：

$$\begin{aligned} \frac{dR(x)}{dx} \Big|_{x=0} &= B_1 = 1 \times B_1 = 1! B_1 \\ \frac{d^2}{dx^2} R(x) \Big|_{x=0} &= 2B_2 = 1 \times 2 \times B_2 = 2! B_2 \\ \frac{d^3}{dx^3} R(x) \Big|_{x=0} &= 6B_3 = 1 \times 2 \times 3 \times B_3 = 3! B_3 \end{aligned}$$

这样，我们可以推断定：R(x)的第 n 阶导数在 x=0 时，可以表示成 B_n 乘以 n!。又因为我们采用台劳型近似，则误差函数 R(x)的第 K 阶以前导数在 x=0 时都必须为零，才可以称为第 K 阶台劳近似。所以，B₁=0, B₂=0, B₃=0 一直到 B_{n-1}=0, 于是，函数

$$G(\omega^2) = 1 + \dots + B_{K+1} \omega^{2(K+1)} + \dots + B_n \omega^{2n}$$

就是对于幅度为 1 的 K 阶台劳近似。

对于给定 n 值的最高阶台劳近似函数为：

$$G(\omega^2) = 1 + B_n \omega^{2n}$$

上式称为最平幅度特性近似函数。在截止频率处(=1)，上式化为：

$$G(1^2) = 1 + B_n$$

系数 B_n 取决于截止频率处，人们规定是什么样的幅度，当 B_n=1 时，G(1²)=2，于是截止频率 =1 处对应着输出功率下降 3 db，输出幅度下降 0.707 倍。这种最平幅度近似还有一个名字叫做勃脱瓦兹(Butterworth)响应。多项式

$$G(\omega^2) = 1 + \omega^{2n}$$

也叫做 n 阶勃脱瓦兹多项式。

(四) 切比雪夫(Chebyshev)近似

现在我们再讨论另一种近似方法。这就是让近似函数在给定函数附近摆动，使误差平均地分布在整个频带内。同时我们还把最大值的大小减到最小，这也就等于偏离近似。我们把这种近似叫做切比雪夫近似。由于在工程中很有用，所以打算详细地来讲。

一般的问题为在区间 $(-1, +1)$ 范围内求出与某一常数为切比雪夫近似的 m 阶多项式的系数(将 ω 轴归一化成频率带边缘等于 ± 1)。误差函数本身为一 m 阶多项式，设为 $h(\omega)$ ，且其阶状如图 18 所示，其中 h 峰值被归一化于 1。

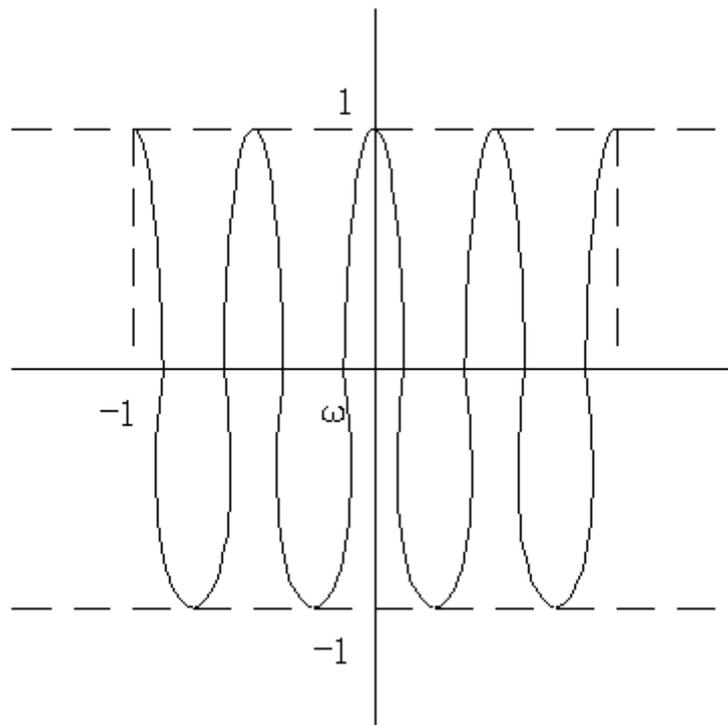


图 18

根据数学分析可知，一个 m 阶切比雪夫近似的误差函数在近似区域内应达峰值 $m+1$ 次； $m-1$ 个出现于近似区内，2 个出现于边界上。在区内的峰值点上， h 的导数应为零，且所有导数零点应为一阶零点。现在，设有多项式 $1-h^2$ ；它在所有 $m+1$ 个 h 峰值点将等于零，因为在这些点上， $h = \pm 1$ 。而且，它在区内峰值点上将有二阶零点。这可由 $1-h^2$ 的导数 $2hh'$ 在这些点也零而得出。在两端 $\omega = \pm 1$ 点， $1-h^2$ 仅有一阶零点。因此， $1-h^2$ 除了含有 $(h')^2$ 及 $(1-h)(1+h)$ 外，无其他因子。这样我们有：

$$1 - h^2 = K^2 (1 - \omega^2) \left(\frac{dh}{d\omega} \right)^2$$

以及

$$\frac{dh}{\sqrt{1-h^2}} = \pm \frac{1}{K} \frac{d\omega}{\sqrt{1-\omega^2}}$$

其中，K 为常数。h 的解可由上式积分得出。其结果为：

$$\cos^{-1} h = \pm \frac{1}{K} \cos^{-1} \omega$$

已知，当 ω 由 -1 到 +1，h 在 ± 1 间摆动 m 次，这就确定了 $K=1/m$ ，所以

$$h = \cos(m \cos^{-1} \omega)$$

并可写为：

$$h = \cos my$$

$$= \cos y$$

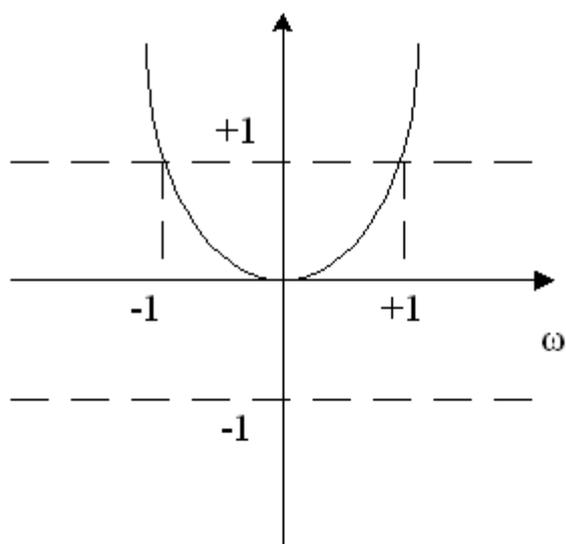
这些多项式可以表示为 $T_m(\omega)$ 并称第一类切比雪夫多项式，m 为多项式的阶。

$$T_m(\omega) = \cos(m \cos^{-1} \omega) \quad -1 \leq \omega \leq 1$$

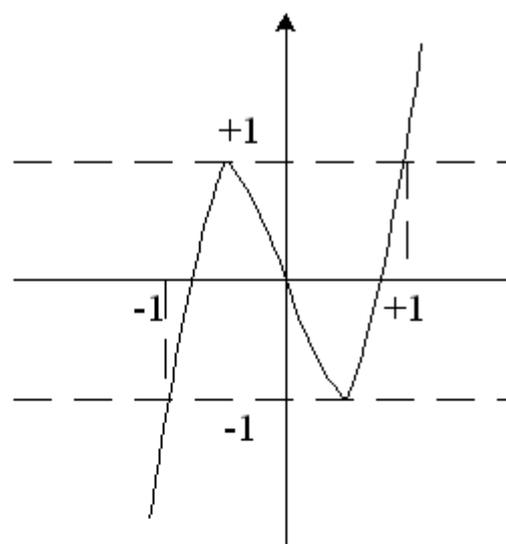
对于 $|\omega| > 1$ 的情况，就有：

$$T_m(\omega) = \cosh(m \cosh^{-1} \omega) \quad |\omega| > 1$$

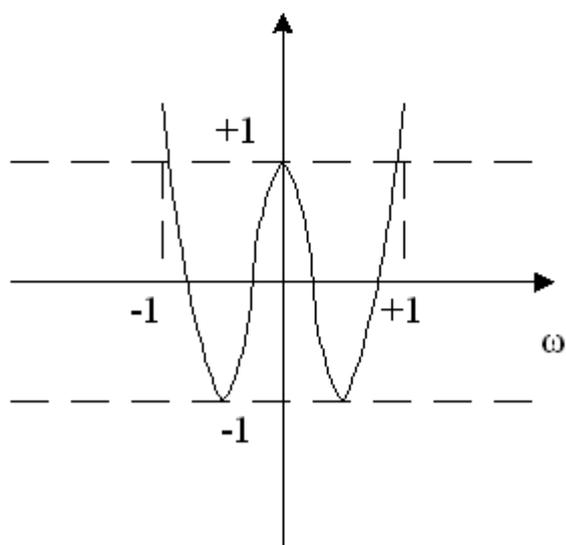
[图 19](#) 示出了几个低阶切比雪夫多项式 [图形及其数学表达式](#)：



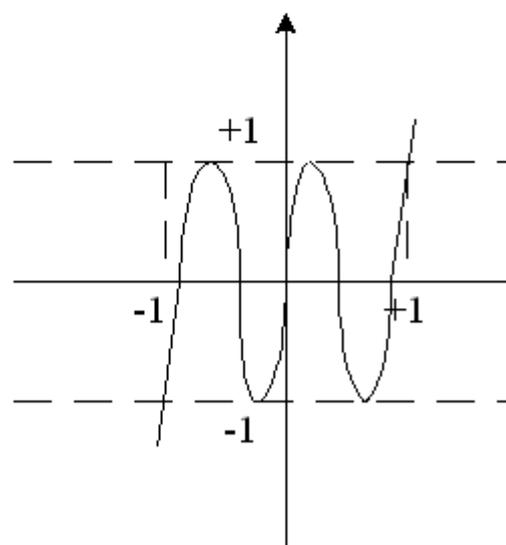
(a) $T_3(\omega) = 2\omega^2 - 1$



(b) $T_3(\omega) = 4\omega^3 - 3\omega$



(c) $T_4(\omega) = 8\omega^4 - 8\omega^2 + 1$



(d) $T_5(\omega) = 16\omega^5 - 20\omega^3 + 5\omega$

图 19

(五)最大平滑滤波器的综合

在我们研究了近似条件和某些特定的近似函数，加上网络分析时推导的结论：图 16 所示的梯形结构低通滤波器，其幅度平方函数 $A^2(\omega)$ 的一般表示式为：

$$A^2(\omega) = 1 + B_1\omega^2 + B_2\omega^4 + B_3\omega^6 + \cdots + B_n\omega^{2n} \quad (7)$$

其中 n 是滤波器的元件个数，我们就有条件来综合滤波器的元件。在近似理论中已经指出：理想的低通滤波器特性可以采用台劳近似。它的最高阶

近似就是勃脱瓦兹(最大平滑)响应。它要求低通滤波器的幅度平方函数满足下列公式:

$$G(\omega^2) = 1 + \omega^{2n} \quad (8)$$

其中 n 为滤波器的元件个数。比较(7)式(8)式就知道, 如果希望用上述梯形结构来综合滤波器只要令这两个公式中的各项系数相等, 则有:

$$\begin{aligned} B_n &= 1 \\ B_1 = B_2 = B_3 = \cdots = B_{n-1} &= 0 \end{aligned}$$

利用这个条件, 我们就可以解出满足最大平滑函数的滤波器。下面就来找找看:

一节最大平滑低通滤波器:

根据定量分析, 一节低通滤波器的幅度平方函数的数学式为:

$$A^2(\omega) = 1 + \frac{L^2}{4} \omega^2$$

要满足最大平滑的要求, 则有:

$$\begin{aligned} \frac{L^2}{4} = B_n = 1; \quad L^2 = 4; \quad L = \pm 2 \\ \text{取} \quad L = 2 \end{aligned}$$

$L = -2$ 是物理上不能实现的。

二节最大平滑低通滤波器:

其幅度平方函数的通用式为:

$$A^2(\omega) = 1 + \frac{(L_1 - C_2)^2}{4} \omega^2 + \frac{L_1^2 C_2^2}{4} \omega^4$$

则有：

$$B_1 = \frac{(L_1 - C_2)^2}{4} = 0$$

$$B_2 = \frac{L_1^2 C_2^2}{4} = 1$$

$$L_1 = C_2 = \pm j\sqrt{2}$$

$$L_1 = C_2 = \pm\sqrt{2}$$

取：

$$L_1 = C_2 = \sqrt{2}$$

其他解无物理意义。

三节最大平滑低通滤波器：

其幅度平方函数的通用式为：

$$A^2(\omega) = 1 - \frac{(L_1 + L_3 - C_2)^2}{4} \omega^2 + \left[\frac{L_1^2 C_2 (C_2 - 2L_3)}{4} + \frac{L_3^2 C_2 (C_2 - 2L_1)}{4} \right] \omega^4 + \frac{L_1^2 C_2^2 L_3^2}{4} \omega^6$$

要满足最大平滑的要求，则有：

$$\frac{(L_1 + L_3 - C_2)^2}{4} = B_1 = 0$$

$$\left[\frac{L_1^2 C_2 (C_2 - 2L_3)}{4} + \frac{L_3^2 C_2 (C_2 - 2L_1)}{4} \right] = B_2 = 0$$

$$\frac{L_1^2 C_2^2 L_3^2}{4} = B_3 = 1$$

求解并取有理解为：

当 $C=1$ 弧度/秒时， $L_1=L_3=1$ (亨利) $C_2=2$ (法拉)

从上述讨论，已经可以看出，当滤波器节数超过四节以上，直接求解法就

显得很难了。

这里我们就要用到复变函数理论来求高阶最大平滑滤波器。我们还是从最大平滑近似函数出发： $A^2(\omega) = 1 + \omega^{2n}$

用 $S=j\omega$ 把 ω 平面开拓到复数平面 S 上，则：

$$S^{2n} = (j\omega)^{2n} = (j^2)^n \omega^{2n} = (-1)^n \omega^{2n}$$

$$A^2(S) = 1 + (-1)^n S^{2n}$$

这就是最大平滑函数的复变函数表示法。又因为复变函数中，零点和极点的位置决定了这个函数的特性，所以我们也来求出 $A^2(S) = 0$ 时，各个零点的位置。则有：

$$(-S^2)^n = -1 = e^{j\pi}$$

$$-S^2 = e^{j\frac{\pi}{n}}$$

$$S_K = (-1)^{\frac{1}{2}} (-1)^{\frac{1}{2n}} = e^{j\frac{2K+n-1}{2n}\pi}$$

式中： $K=1, 2, 3, \dots, 2n$ 。

这些零点都落在 S 平面的单位圆上，并且既以实轴为对称又以虚轴为对称。对下列情况求零点：

$$n = 1, \quad 1 - S^2 = 0 \quad S_{1,2} = \pm 1$$

$$n = 2, \quad 1 + S^4 = 0 \quad S_K = e^{j\frac{2K+1}{4}\pi} \quad K = 1, 2, 3, 4$$

$$n = 3, \quad 1 - S^6 = 0 \quad S_K = e^{j\frac{2K+2}{6}\pi} \quad K = 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

其零点的分布如图 20 所示。

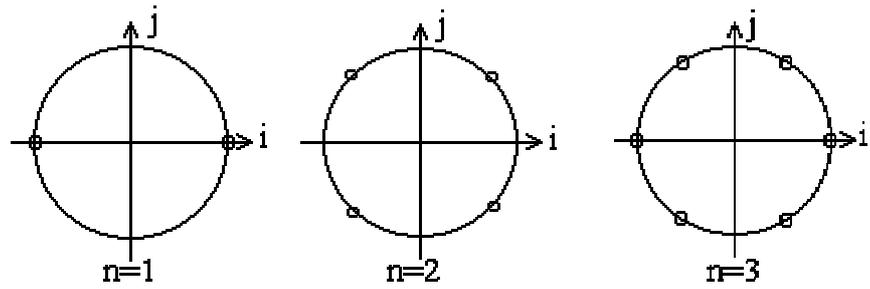


图 20

现在需要把幅度平方函数的根和以前学过的反射系数、插入损耗和两端对网络的输入阻抗联系起来。根据定义，两端对网络的插入阻抗和它的传递函数的幅度平方有下列关系：

$$L_i = 10 \lg \frac{P_{\max}}{P_2} = 10 \lg |A(\omega)|^2$$

它只描述了负载吸收功率 P_2 和电源最大输出功率之间的关系。而没有直接地和网络中的元件联系起来。不过，我们知道滤波器网络是无源元件组成的，它不吸收功率。于是，最大输出功率一定是由这个两端网络反射回去一部分，留下的才成了负载 R 上的吸收功率。这样，我们可写成：

$$P_2 = P_i - P_r$$

P_i 输入功率， P_r 反射功率， R_2 负载 R 上的吸收功率，在这里 $P_i = P_{\max}$ ，(参见图 21)。

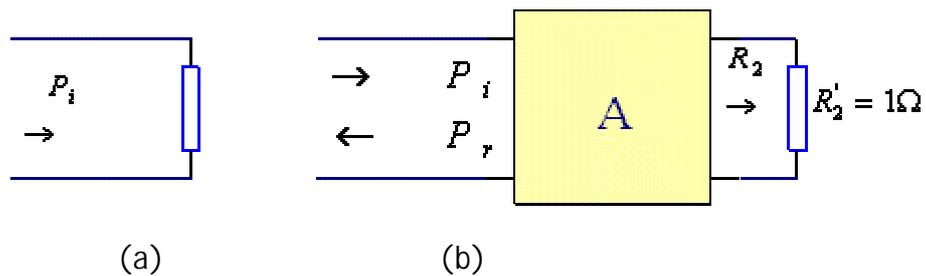


图 21

另一方面，根据传输线理论，反射功率 P_r 为：

$$P_r = \Gamma \Gamma^* P_i = |\Gamma|^2 P_i$$

式中 Γ 为反射系数， $*$ 表示 Γ 的共轭复数，故得插入损耗：

$$L_i = 10 \lg \frac{P_{\max}}{P_2} = 10 \lg \frac{1}{1 - \Gamma \Gamma^*}$$

注意 $\Gamma = \Gamma(j\omega)$ ，它是因频率 ω 而变的。所以，按照前面讲的近似函数所提出的具体，实际就是找出反射系数的模平方 $|\Gamma|^2$ 与 $A(\omega)$ 的函数关系。即：

$$\frac{1}{1 - \Gamma \Gamma^*} = \frac{1}{1 - |\Gamma|^2} = |A(\omega)|^2$$

$$|\Gamma|^2 = 1 - \frac{1}{|A(\omega)|^2}$$

有了反射系数 Γ 和 $A(\omega)$ 之间关系，我们还可以推出两端对网络的输入端的输入阻抗 $Z_{in}(1)$ 和 $\Gamma(j\omega)$ 之间的关系。

$$Z_{in(1)} = \frac{1 + \Gamma(S)}{1 - \Gamma(S)}$$

另外根据 $Z_{in}(1)$ 求网络元件又有下列关系

$$Z_{in(1)} = \frac{A + B}{C + D}$$

式中 A、B、C、D 是通用矩阵中的参数。到此，我们已经把近似函数的要求和网络元件联系起来，下面就通过举例来说明这些过程。

求一节低通最大平滑式归一化滤波器的元件值。已知，它的幅度平方函数有下列关系：

$$|A(\omega)|^2 = 1 + \omega^{2n}$$

对于一节滤波器， $n=1$ ，则：

$$|A(\omega)|^2 = 1 + \omega^2$$

$$\Gamma(\omega)\Gamma^*(\omega) = 1 - \frac{1}{1 + \omega^2} = \frac{\omega^2}{1 + \omega^2}$$

利用 $S=j\omega$ ，则有：

$$\Gamma(S)\Gamma(-S) = \frac{-S}{1-S^2} = \frac{S(-S)}{(S+1)(S-1)}$$

根据另极点分布的位置， $\Gamma(S)$ 是包括了S平面的左半平面上的点， $\Gamma(-S)$ 包括了S平面右半平面上的点。所以：

$$\Gamma(S) = \frac{S}{S+1} \quad \Gamma(-S) = \frac{-S}{S-1}$$

再根据

$$Z_{in(1)} = \frac{1+\Gamma(S)}{1-\Gamma(S)} = \frac{S+1+S}{S+1-S} = 2S+1$$

这根据电阻分析 $Z_{in(1)}=2S+1$ 表示着一个2亨利的电感和一个1欧姆的电阻串联，去掉这1欧姆电阻(归一化负载电阻)，该两端对网络中只剩下一个2亨利的电感，这和直接用类比法求的结果是一样的。见图22所示。

下面我们来看一下二节滤波器的情况：

二节低通最大平滑式归一化滤波器的元件值的求解过程：

对于二节滤波器 $n=2$ 来说，最大平滑函数应该是

$$|A(\omega)|^2 = 1 + \omega^4$$

$$\Gamma(\omega)\Gamma^*(\omega) = 1 - \frac{1}{1 + \omega^4} = \frac{\omega^4}{1 + \omega^4}$$

开拓到S平面，则有：

$$\Gamma(S)\Gamma(-S) = \frac{S^2(-S^2)}{(S-S_1)(S-S_2)(S-S_3)(S-S_4)} = \frac{S^4}{1+S^4}$$

根据上式可知其左半S平面上的两个根为：

$$S_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} + j\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad S_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} - j\frac{\sqrt{2}}{2}$$

取其左半S平面上的零，极点构成 $\Gamma(S)$ ，则：

$$\Gamma(s) = \frac{s^2}{\left(s + \frac{\sqrt{2}}{2} - j\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(s + \frac{\sqrt{2}}{2} + j\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}$$

$$= \frac{s^2}{s^2 + 2s + 1}$$

求其两端对输入端的输入阻抗，则有：

$$Z_{in(1)} = \frac{s^2 + 2s + 1 + s^2}{s^2 + \sqrt{2}s + 1 - s^2} = \frac{2s^2 + 2s + 1}{\sqrt{2}s + 1} = \sqrt{2}s + \frac{1}{\sqrt{2}s + 1}$$

$$= Z_1 + \frac{1}{Y_2 + 1}$$

其中 Z_1 是 亨利的电感， Y_2 是 $\sqrt{2}$ 法拉的电容，其具体结构见图 23 所示，

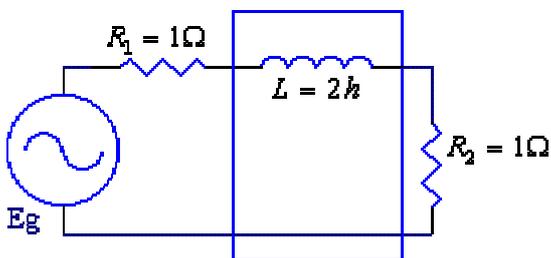


图 22

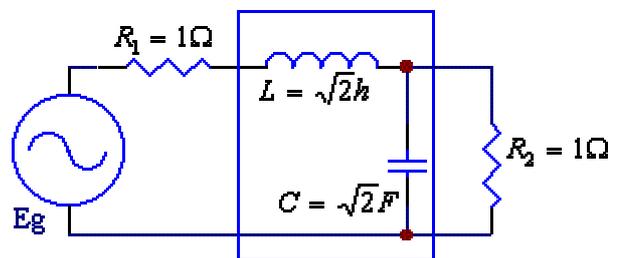


图 23

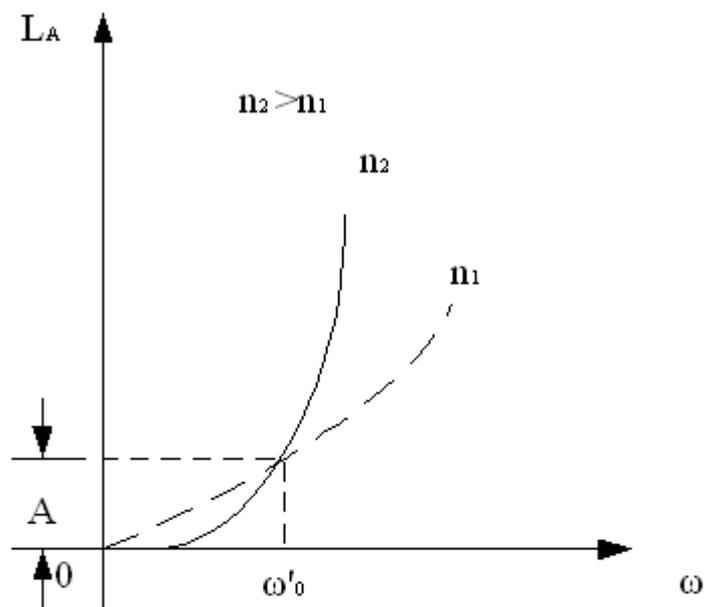
这个结果又和以前类比法求出的相一致。但是求解的过程简单明了。

把这些 $n=2, n=3, \dots, m$ 的结果算出来，列成表。

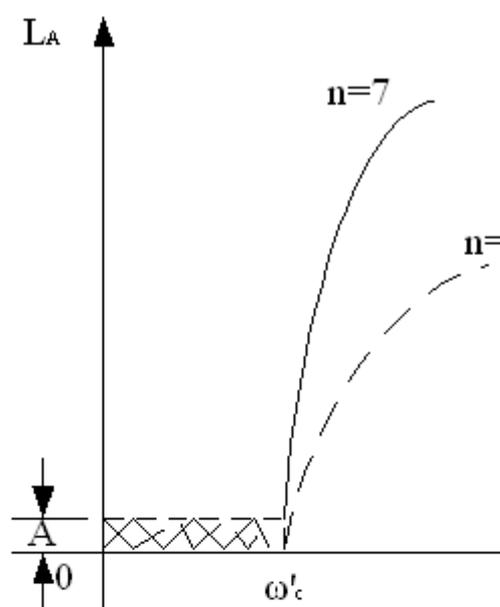
不同的 n 值，网络有两种形式。一种是第一个元件为并联电容，如图 24(a) 所示。另一种是第一个元件为电感，如图 24(b) 所示。不同 n 值网络的元件值列于表 2。表中所列的各元件值的单位，电容为法拉，电感为亨利。

现在应用综合方法设计出来的滤波器大都具有最大平滑特性或切比雪夫特性。附图 1 给出母型滤波器的最大平滑特性，它的特点是无论在通带或止带内，插入损耗 L_i 都随着 ω 的上升而单调增加。虽然在这两个频带内增加的速度是很不相同的。附图 2 表示切比雪夫滤波特性，它的特点是：在通带内，插入损耗 L_i 在 0 db 与 A db 之间来回变化；在截止频率上， $L_i = A$ db；时入止带后， L_i 单调上升。

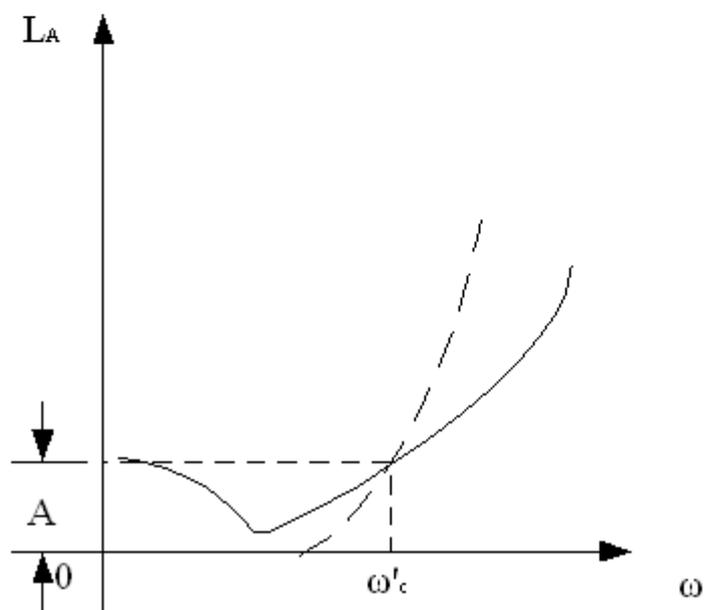
从这两个图形可以看出，当元件数目 n 增大时， L_i 从通带至止带的过滤较前陡峭。实际上，元件数目愈多， L_i 在过度区内的上升愈快。所以，在设计滤波器时，首先是根据提出技术要求，确定所需的元件数目 n 。



附图 1



附图 2



附图 3

附图 3 是最大平滑滤波特性和切比雪夫滤波特性的比较。它们所用的元件数目相同(n=2)。一种非常显著的差别是在截止频率 ω_c 以外，切比雪夫特性的 L_A 的曲线上升得非常迅速，超过最大平滑滤波器甚多。这意味着切比雪夫滤波器能够提供一极其明显的截止区域，把通带和止带分开来。这是它的优点。不过，也有它的缺点，就是在通带内也有一定的插入损耗。不但如此，当构成滤波器的电抗元件具有较大的损耗时，虽然任何一种滤波器的通带响应都会发生改变，但是这种影响对切比雪夫滤波器尤其厉害。

下面我们列出这两种母型滤波器的各种计算公式和表格，所用符号的含意在下面叙述。

() 最大平滑滤波器:

变换器损耗 L_A

$$L_A(\omega) = 10 \lg \left[1 + \varepsilon \left(\frac{\omega}{\omega_c} \right)^{2n} \right]^{db}$$

$$\varepsilon = \left(\text{anti log} \frac{A}{10} \right) - 1$$

式中 n =元件数， A =在截止频率 ω_c 上的器件损耗，当 $A=3db$ 时， $\varepsilon=1$ 。

止带内的 L_A 与 ω 的关系见有关书籍。

元件参数

以下公式适用两端加载， $A=3db$ ， $g_0=1$ ， $g_{n+1}=1$ ， $\omega_c=1$ 的情况。(单位: 欧姆; 亨利或法拉)

$$g_0 = 1,$$

$$g_K = 2 \sin \left(\frac{(2K-1)\pi}{2n} \right), \quad K = 1, 2, \dots, n$$

$$g_{n+1} = 1$$

应用这些公式计算出来的元件值见表 2。

[表 2 最大平滑母型低通滤波器元件值](#)

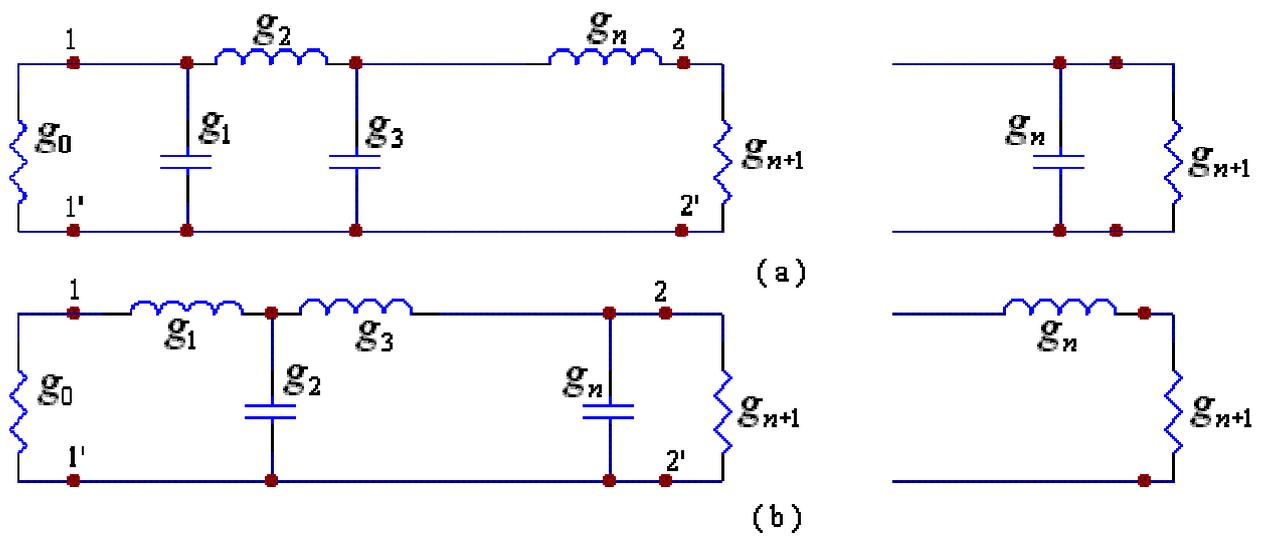


图 24

更详细的表格可参考有关书籍

()切比雪夫滤波器

切比雪夫滤波器的变换损耗的表示工，在通带和止带内是不一样的。

变换器损耗

通带 $\omega' \leq \omega'_c$

$$L_A(\omega') = 10 \lg \left\{ 1 + \varepsilon^2 \cos^2 \left[n \cos^{-1} \left(\frac{\omega'}{\omega'_c} \right) \right] \right\}$$

止带 $\omega' \geq \omega'_c$

$$L_A(\omega') = 10 \lg \left\{ 1 + \varepsilon^2 \cos^2 \left[n \operatorname{Ch}^{-1} \left(\frac{\omega'}{\omega'_c} \right) \right] \right\}$$

式中的符号如前。Ch 是双曲余弦函数，可从有关函数表查得。L_A 与 ω' 的关系曲线可以从有关书籍中查到，我们的曲线只适用于通带内器件损耗 L_A=0.1db 的情况。

元件参数 ($g_0=1, \omega'_c=1$)

辅助参数计算公式:

$$\beta = \ln\left(C + h \frac{A}{17.37}\right)$$

$$\gamma = \sinh\left(\frac{\beta}{2n}\right)$$

$$a_K = \sin\left[\frac{(2K-1)\pi}{2n}\right], \quad K = 1, 2, \dots, n$$

$$b_K = \gamma^2 + \sin^2\left[\frac{K\pi}{n}\right], \quad K = 1, 2, \dots, n$$

元件计算公式

$$g_1 = \frac{2a_1}{\gamma}$$

$$g_K = \frac{4a_{K-1} \times a_K}{b_{K-1} \times g_{K-1}}, \quad K = 2, 3, \dots, n$$

$$g_{n+1} = 1 \quad (\text{n为奇数时})$$

$$g_{n+1} = C \text{th}^2\left(\frac{\beta}{4}\right) \quad (\text{n为偶数时})$$

表 3 是计算出来的元件值表。它适用于 $A=0.1\text{db}$, $g_0=1$, $C=1$ 的情况, 其结构同最大平滑式滤波器。

表 3 切比雪夫 0.1 db 波纹的元件值

n	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6	g_7
1	0.3052	1.0000
2	0.8430	0.6220	1.3554
3	1.0315	1.1474	1.0315	1.0000	.	.	.

4	1.1088	1.3061	1.7703	0.8180	1.3554	.	.
5	1.1468	1.3712	1.9750	1.3712	1.1468	1.0000	.
6	1.1681	1.4039	2.0562	1.5170	1.9029	0.8618	1.3554

更详细的表格可参考有关书籍:

1. “微波滤波器阻抗匹配网络与耦合结构”
上海科技情报通讯编译室, 1972 年
2. “滤波器综合法设计原理”
黄席椿、高鹏泉 编著, 人民邮电出版社, 1978 年
3. “微波网络” 林为干 著, 国防工业出版社出版, 1978 年

为了能更加自由地运用这些图表, 对这些图表作一个详细说明。图 24 的(a)和(b)中, 1-1' 和 2-2' 之间的电路是母型滤波器的本体; 左方代表电源的“内阻”(图上把电源略去了); 右方代表负载电阻。母型滤波器共有 n 个元件构成, n 的数值取决于对插入损耗的具体要求。当 n 为偶数时, 电路的终端如图 24(a)左方的电路所示。当 n 为奇数时, 电路的终端便接成图 24(a)右方的局部电路所给出的情况。

在网络理论上, 图 24(b)的电路是(a)的“对偶”电路。这两个电路的特性是完全相同的。所以母型滤波器可以采用(a)的结构, 也可以采用(b)的结构。为了扩大母型滤波器的数据的适用范围, 图 24 的电路是归一化了的, 图上标出的符号也具有灵活的含义。下面是母型滤波器所用的符号。

ω_c 母型滤波器的截止频率, 它是通带和止带的分界; 通常令 $\omega_c = 1$
 ω 母型滤波器的频率变量。 $0 < \omega < \omega_c$ 这个范围代表通带; $\omega > \omega_c$ 代表止带;

g_k $k=1 \sim n$ 母型滤波器所用元件的参数, 根据具体情况, 它有着不同的含义(参看图 24); 在一些场合下, 它表示串接线圈的电感量, 而在另一些场合下, 则表示跨接电容的电容量。

g_0 反映电源内阻的参数, 它也有灵活的含义: 当 $g_0 = G'_0$ (即图 24(a)的情况)时, g_0 就是电源内阻 R'_0 。但当 $g_0 = L'_0$ (即图 24(b)的情况)时, g_0 代表电源的内部电导 G'_0 ; 在这种情况下, 电源用等效电流源来表示。

g_{n+1} 反映负载的参数, 亦有灵活含义:

当 $g_{n+1} = G_n$ 时, g_{n+1} 表示负载电阻 R_{n+1} ;

但当 $g_{n+1} = L'_n$ 时, g_{n+1} 代表负载的电导 C_{n+1} 。

所以采用这样灵活的含义, 是使算出的数据表既适用于图 24(a), 也适用于(b)的电路。

通常表 2 所列的数据大都是在 $\omega_c = 1$ 和 $g_0 = 1$ 的条件下计算出来的, 当实际情况不符合以上条件时, 必须对表的数据进行变换, 才能符合实际情况。

实际上就是把母型滤波器仅归一化成别的阻抗电平和频率标度，只要用下列变换式就行。

$$\text{对于电阻或电导有: } R = \left(\frac{R_0}{R_0'} \right) R' \text{ 或 } G = \left(\frac{G_0}{G_0'} \right) G'$$

$$\text{对于电感有: } L = \left(\frac{R_0}{R_0'} \right) \left(\frac{\omega_1'}{\omega_1} \right) L' = \left(\frac{G_0'}{G_0} \right) \left(\frac{\omega_1'}{\omega_1} \right) L'$$

$$\text{对于电容有: } C = \left(\frac{R_0'}{R_0} \right) \left(\frac{\omega_1'}{\omega_1} \right) C' = \left(\frac{G_0}{G_0'} \right) \left(\frac{\omega_1'}{\omega_1} \right) C'$$

这些方程中带撇的量是归一化母型中的量，不带撇的量对应于有标度电路的量。如前面讨论所指出的，本章的原型有 $g_0=R_0'=1$ 或 $g_0=g_1'=1$ 。这和以前讨论的结论是一致的。A 对应 R_0/R_0' 以及 $B = \omega_1'/\omega_1$ 。

我举一个实例来说明这个过程，假定有一个低通母型最大平滑滤波器，节数 $n=3$ ，则查出其低通母型的元件值为 $R_0'=1.000$ 欧姆， $L_1'=1.000$ 亨利， $C_2'=2.000$ 法拉， $L_3'=1.000$ 亨利。现在希望在电源内阻 $R_0=50$ 欧姆，3db 下降点在 100MHZ 的情况下，来实现这个滤波特性。于

是: $\left(\frac{R_0}{R_0'} \right) = 50 = A, \left(\frac{\omega_1'}{\omega_1} \right) = \left(\frac{1}{2\pi \times 10^8} \right) = 0.159 \times 10^{-8}$ 。利用上列

各式就得: $R_0=50$ 欧姆;
 $L_2=L_1=50 \times (0.159 \times 10^{-2}) \times 1=0.795\text{mH}$; $C_2=1/50 \times (0.159 \times 10^{-2}) \times 2=63.6\text{pF}$ 。画成最后的电路图如图 25 所示。

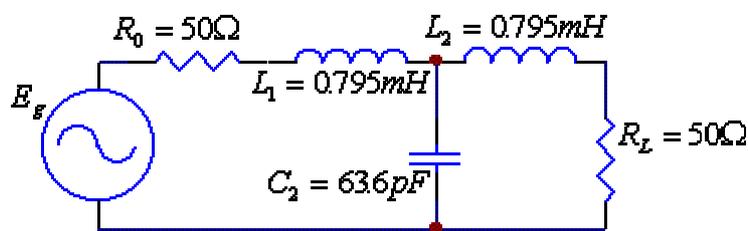


图 25

作为本小节的结束，让我们结合下列的滤波器进行计算，作为实例。

设要求一个通带滤波器，其性能为：

- (1) 在中心频率 $f_0=6680\text{MHz}$ 的驻波比 <1.1 ;
- (2) 在 f_0 的变换器损耗 $<1.1\text{db}$;
- (3) 3db 带宽大于 $f_0 \pm 19\text{MHz}$ ，同时小于 $f_0 \pm 24\text{MHz}$;
- (4) 在 $f_0 \pm 10\text{MHz}$ 内平坦度在 0.3db 以内;
- (5) 止带衰减：在 $f_0 \pm 70\text{MHz}$ 上， $L_A = 50\text{db}$ 。

第(1)和第(2)项指标涉及到元件的损耗，我们暂时将它撇开，这里我们以最大平滑滤波为例，它的中心频率 $f_0=6680\text{MHz}$ 。

()设计截止频率 f_1 、 f_2 和相对带宽 W 等：

$$\frac{19 + 24}{4}$$

根据要求，设截止频率等于 $f_{\text{截止}} \pm$ ，得：

$$f_1 = 6680 + 21.5 = 6701.5 \text{ MHz}$$

$$f_2 = 6680 - 21.5 = 6658.5 \text{ MHz}$$

$$\text{中心频率 } f_0 = \sqrt{f_1 f_2} = 6680 \text{ MHz}$$

$$W = \frac{f_2 - f_1}{f_0} = 0.644\%$$

相对带宽为：

这是一个频率比较窄的滤波器。

()选择元件数 n

元件数 n 取决于要求的第(5)项和第(4)项。要求(5)提出在 $f_0 \pm 70\text{MHz}$ 的频率上， $L_A = 50 \text{ db}$ 。这两个频率实际是

$$f_4 = 6680 + 70 = 6750 \text{ MHz}$$

$$f_5 = 6680 - 70 = 6610 \text{ MHz}$$

首先我们得把这两个频率转换为它们所对应的母型滤波器频率 ω_4' 和 ω_5' 。因为换算后， ω_4' 更靠近零，我们只需要考虑 f_4 。

$$\begin{aligned}\omega_4' &= \frac{1}{W} \left(\frac{f_4}{f_0} - \frac{f_0}{f_4} \right) \\ &= \frac{1}{0.0064} \left(\frac{6750}{6680} - \frac{6680}{6750} \right) = 3.25\end{aligned}$$

根据这个数据，我们可以在附图的曲线上查找。查到 $n=5$ 的曲线给出 $L_A=51.4\text{db}$ ，已可以满足需要。故母型滤波器应由 5 个元件组成。这个步骤当然也可以用公式推算，不过麻烦一些而已。

取 $n=5$ 时，验算要求(3)，完全可以满足而有余。

() 母型低通滤波器

在决定取 $n=5$ 以后，我们便可以应用公式直接得到母型低通滤波器如图 26 所示。

() 换算成带通滤波器

如果所要设计的滤波器系由集总参数的元件组成，到了这里人们便可以根据上一步所得的母型低通滤波器，应用式 4 和式 5，把它换算成图 27 所示的带通滤波器，这就是设计结果。

可是对于微波滤波器来说，工作似乎只进行了一半，还有一个怎样把图 27 的电路具体化的问题，即采用什么结构才以获得与图 27 的电路大致等同的效果。这个问题就是第二部分的内容。

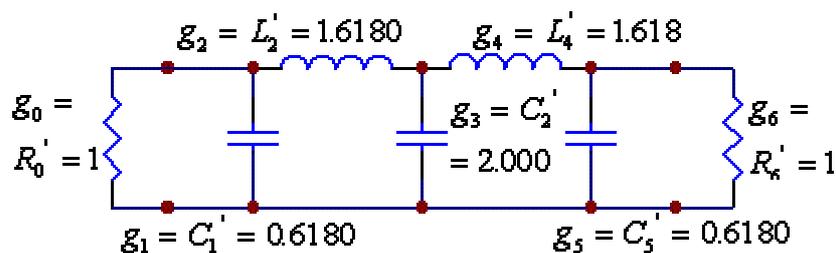


图 26

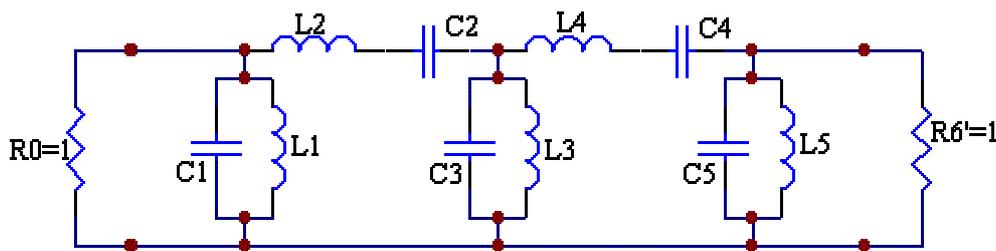


图 27

第二部分 微波滤波器

引言:

微波滤波器，由于微波的特殊性，微波电路所采用的元件在结构上和普通电路所用的元件是截然不同的。元件结构上的这种差异引起了微波滤波器的特殊性，当然作为滤波器，它和其他滤波器具有许多共性。这就是我们第一部分所讲的内容。

微波传输线有多种形式：同轴线、波导、微带线等等。就拿微带线来说，实际采用的也有几种不同的结构。同轴线和微带线传输 TEM 波型；波导只能传输 TE(H) 波或 TM(E) 波。加上机械结构的不同，这就决定了不同的微波滤波器各有其特殊性。下一节首先讨论微波滤波器的共同点，然后再分析波导滤波器的特殊性。

第二部分 微波滤波器

§2-1 微波滤波器的频率特性

从图 28 可以看出，带通滤波器的组成部分是许多串联谐振回路和并联谐振回路。以前已经学过，各种开路和短路的传输线段都具有串联谐振特性和并联谐振

特性。人们自然会想到应用传输线谐振器作为带通滤波器的组成部分，而且实际也是这样做的。

可是，传输线理论也指出：传输线谐振具有两个特点：

(1) 多谐性 传输线谐振器具有许许多多谐振频率，所以当频率改变时，微波带通滤波器所用的传输线谐振器将多次出现谐振现象，而这种情况是集中参数的 LC 回路所没有的。由于谐振现象的反复出现，微波带通滤波器的滤波特性将发生改变。其具体体现就是通带和止带在频率轴上不断交替出现。如果我们将器件损耗 L_A 与频率 ω 的关系绘出来，将会获得图 28 所示的情况。对于集中参数带通滤波器，这种情况是不会出现的。设计一个通带便只有一个通带，在微波滤波器中，第二通带(实际上还存在第三、第四...等等通带)的出现可能关系到设计的成败，是一个值得注意的问题。

低通和高通滤波器所用的元件是单独的电感和电容，这在集总参数电路内是很容易获得的，但在微波传输线上却不这么容易，而且根据传输线形的不同，体现的难易程度也不一样。一般来说，半集中参数(即大致具有集总数性质)的电感和电容在微带线上较容易实现，同轴线次之，在波导内便要比较复杂的结构。

(2) 传输线谐振器还有多模性 允许多个模式同时工作的可能性，而一旦出现了高型波，器件的正常工作便受到影响，微波滤波器的滤波性能受到一定的限制。所以，一般是要避免出现高型波。但是，事情总是两方面的，目前也有用多模做成的滤波器，这就是利用了高型波。

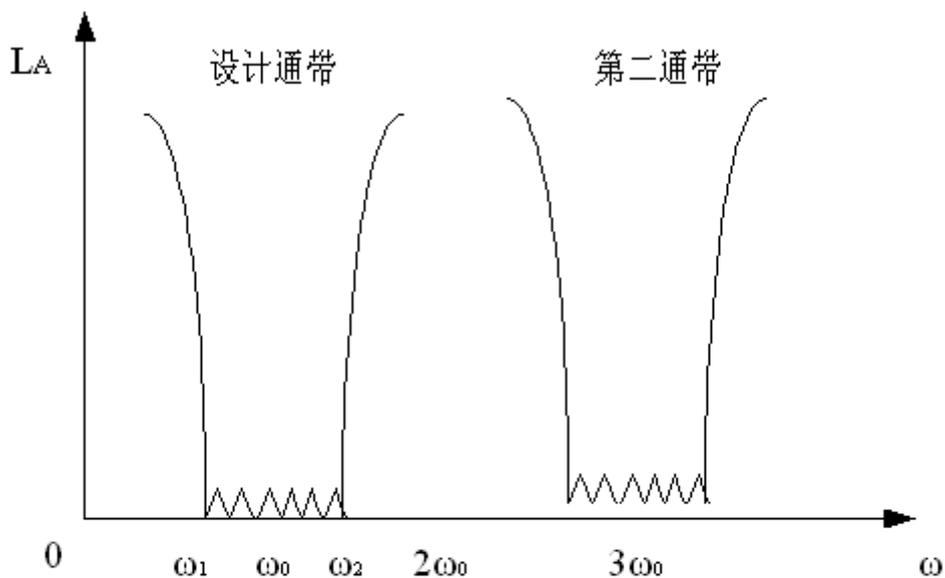


图 28

同轴线和微带线传输 TEM 波，并不存在截止波长的问题。所以这两种传输线的低通滤波器具有真正的低通特性，即频率为零(直流)至频率等于所设计的截止频率 f_c 的信号都是可以顺利通过这种滤波器。但是空心波导所传输的是 H 波或 E 波，这里存在一个截止波长 $\lambda_{cH_{10}}$ (注意波导的截止波长 $\lambda_c^{H_{10}}$ 和滤波器的截止频率 f_c 不是一个概念)。所以，波导低通滤波器的低通概念和一般滤波器不同，直流是肯定通不过的。

也正是因为波导所传输的是 H 波或 E 波，直接决定器件特性的参数是导内波长 λ_g ，而不是 λ_0 。所以在波导滤波器的设计中，首先应根据波导的具体尺寸和频率与导内波长的函数关系，把所给出的一切频率数据转变为导内波长数据。

下面我们就来对自由空间频率变化和波导内的导内(亦叫波导波长)波长变化之间的关系进行研究。这里要用到函数的微分。一般的滤波器的指标，都是以工作频率的形式给出的。但是在波导内，电磁波是以横电波(TE 波)或横磁波(TM 波)的形式传输的。例如常用的 TE_{10} 波，它可以看成是电磁波在波导窄壁上来回反复的结果，所以它在波导内是以波导波长 λ_g 来表征它的波长的。和电磁波的自由空间中的波长 λ_0 又不同，两者之间有下列关系：

$$\lambda_g = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_0}{2a}\right)^2}}$$

其中： λ_g 是波导波长， λ_0 是自由空间中波长， a 是波导管的宽边尺寸，在波导中传 TE_{10} 波时， λ_g 和 λ_0 的关系就是这样。我们首先来看电磁波的自由空间波长 λ_0 的变化和波导内的波导波长 λ_g 变化之间的关系。我们对上式两边取微分，则有：

$$d\lambda_g = \frac{d\lambda_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_0}{2a}\right)^2}} + \frac{\lambda_0 \left(-\frac{1}{2}\right) \left(-2 \frac{\lambda_0}{4a^2}\right) d\lambda_0}{\left(1 - \left(\frac{\lambda_0}{2a}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

整理后得：

$$d\lambda_g = \frac{d\lambda_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_0}{2a}\right)^2}} \times \left(\frac{\lambda_g}{\lambda_0}\right)^2$$

用 λ_g 来除两边，则有：

$$\frac{d\lambda_g}{\lambda_g} = \frac{d\lambda_0}{\lambda_0} \times \left(\frac{\lambda_g}{\lambda_0}\right)^2$$

这个公式说明，波导波长的相对变化率 $d\lambda_g/\lambda_g$ 和自由空间波长的相对变化率 $d\lambda_0/\lambda_0$ 之间，差一个因子 $(\lambda_g/\lambda_0)^2$ ，因为 λ_g 一般总是大于 λ_0 ，所以 $(\lambda_g/\lambda_0)^2$ 在一般正常的波导使用情况下近似等于 2。到此，还没有把波导波长和相对频率变化率联系起来。我们知道，自由空间波长 λ_0 和光的传播速度以及电磁波的频率 f 有下列关系：

$$C = f\lambda; \quad \text{或} \quad \frac{C}{f} = \lambda$$

同样对两边取微分得：

$$d\lambda = -\frac{C}{f^2} df$$

$$\text{两边除以} \lambda, \text{ 得} \frac{d\lambda}{\lambda} = -\frac{C}{f^2} df \cdot \frac{f}{C} = -\frac{df}{f}$$

这个公式说明，自由空间波长 λ_0 的相对变化率 $\frac{d\lambda_0}{\lambda_0}$ 和工作频率的相对变化率 $\frac{df}{f}$

是一样的，不过差一个负号，这说明，频率向增加的方向变化时，波长却向着减小的方向变化。再把它代入上式，则有：

$$\frac{df}{f} = -\left(\frac{\lambda_0}{\lambda_g}\right)^2 \frac{d\lambda_g}{\lambda_g}$$

这个式子就是我们学习波导滤波器时，第一个涉及的内容。它在物理含义上可以作下列解释：(1) 频率向增大的方向变化时，波导波长却向着减小的方向变化。
 (2) 频率的相对变化率和波导波长的相对变化率差一个因子 $(v_0/v_g)^2$ ，对于一般情况，这个因子近似地等于 0.5。这就是说，频率的相对变化率是 1% 时，对应了波导的相对变化率 2%。也就是波导波长以近乎是一半的变化就抵得上频率的一倍的变化。我们可以通过图 29 中的两条曲线的关系来说明，从图中可知，用波导来实施带通滤波器时，由于波导的色散效应，使得波导滤波器的选择特性比在自由空间中的其他形式滤波器的选择性又额外地好了一倍。所以，在设计这类滤波器时，必须注意这一点。

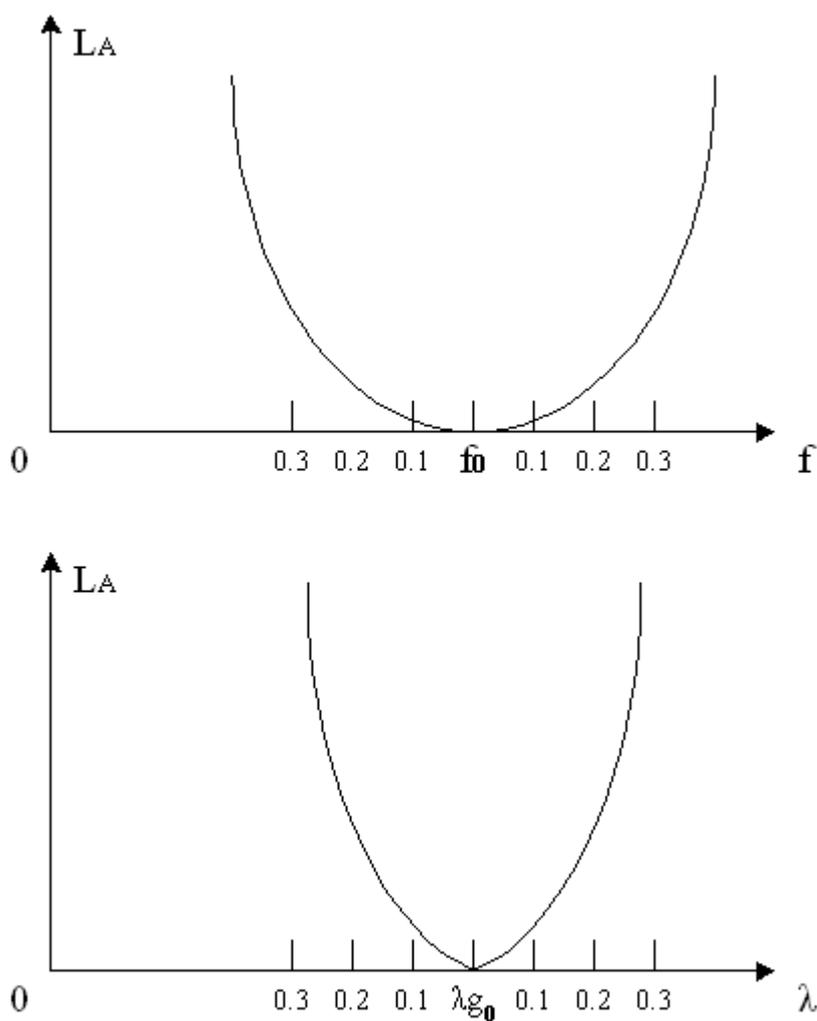


图 29

下面我们仍以前一节的滤波器设计为例，进行计算。

(1) 计算导内波长的数据：

设采用 34.85×15.80 的矩形波导，则 H_{10} 波的截止波长为：

$c=6.970$ 厘米

根据波导波长 λ_g 和自由空间波长 λ_0 保持以下关系:

$$\frac{1}{\lambda_g^2} = \frac{1}{\lambda_0^2} - \frac{1}{\lambda_c^2} = \left(\frac{f}{C}\right)^2 - \frac{1}{\lambda_c^2}$$

亦即

$$\begin{aligned}\lambda_g &= \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{f}{C}\right)^2 - \frac{1}{\lambda_c^2}}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{0.03336f(\text{GHz})^2 - \left(\frac{1}{\lambda_c}\right)^2}} \text{ (cm)}\end{aligned}$$

以上关系式是通用公式, 式中 f 用 GHz 即 10^9Hz 表示, c 用厘米表示, 所以算得的 λ_g 的单位亦为厘米。

上一节的要求(3)规定, 滤波器的 3db 带宽必须大于 $f_{\text{信}} \pm 19\text{MHz}$, 同时又必须小于 $f_{\text{信}} \pm 24\text{MHz}$ 。这里有四个频率。现在 $f_{\text{信}}=6.680\text{GHz}$, 故这四个频率为:

$$f_a = 6.680 + 0.019 = 6.699\text{GHz}$$

$$f_b = 6.680 + 0.024 = 6.704\text{GHz}$$

$$f_c = 6.680 - 0.019 = 6.661\text{GHz}$$

$$f_d = 6.680 - 0.024 = 6.656\text{GHz}$$

应用式 可得这四个频率所对应的波导波长分别为:

$$\lambda_{ga} = 5.8369\text{cm}$$

$$\lambda_{gb} = 5.8294\text{cm}$$

$$\lambda_{gc} = 5.8939\text{cm}$$

$$\lambda_{gd} = 5.9015\text{cm}$$

根据这四个波导波长, 可以算出滤波器的截止导内波长为:

$$\lambda_{g1} = \frac{\lambda_{gc} + \lambda_{gd}}{2} = 5.8977 \text{厘米}$$

$$\lambda_{g2} = \frac{\lambda_{ga} + \lambda_{gb}}{2} = 5.8655 \text{厘米}$$

与信道频率的波导波长相差极小。

上一节要求(5)规定：在 $f_{\text{信}} \pm 70\text{MHz}$ 上， $L_A=50\text{db}$ 。这里还有两个频率：

$$f_m = 6.680 + 0.070 = 6.750 \text{ GHz}$$

$$f_n = 6.680 - 0.070 = 6.610 \text{ GHz}$$

它们所对应的波导波长为：

$$\lambda_{gm} = 5.7625 \text{ cm}$$

$$\lambda_{gn} = 5.9725 \text{ cm}$$

(2) 计算波导波长带宽 W

$$W_\lambda = \frac{\lambda_{g1} - \lambda_{g2}}{\lambda_{g0}}$$

以具体数字代入得：

$$W_\lambda = \frac{5.8977 - 5.8332}{5.8655} = 0.0110$$

$$= 1.10\%$$

波导滤波器需用波导波长计算带宽。与以前用频率计算来比较，带宽几乎增大一倍(原来 $W=0.644\%$)。

(3) 由导内波长推算母型低通滤波器的对应频率 f_c ：

$$\frac{\omega'}{\omega'_C} = \frac{2}{W_\lambda} \left(\frac{\lambda_{g0} - \lambda_g}{\lambda_{g0}} \right)$$

对应:

$$\lambda_{gm} : \frac{\omega'_m}{\omega'_C} = \frac{2}{W_\lambda} \left(\frac{5.8655 - 5.7625}{5.8655} \right) = 3.19,$$

$$\lambda_{gn} : \frac{\omega'_m}{\omega'_C} = \frac{2}{W_\lambda} \left(\frac{5.8655 - 5.9725}{5.8655} \right) = -3.32。$$

(4) 选择元件数 n

从上面计算结果可知, 现在决定的因素是 $\frac{\omega'_m}{\omega'_C}$ 从附图的曲线可以查得, 当

$\left| \frac{\omega'}{\omega'_C} \right| - 1 = 2.19$ 时, n=5 的曲线给出 $L_A=50.05\text{db}$ 。所以取 n=5 还勉强可以满足要求。

上一节的第四项要求在 n=5 时仍可满足有余, 这里便不详细计算了。

第二部分 微波滤波器

§2-2 传输线谐振器

这一节所讨论的传输线谐振器是广义的，即为但包含双线传输线谐振器，而且还包括微带线谐振器、同轴线谐振器和波导谐振器等。

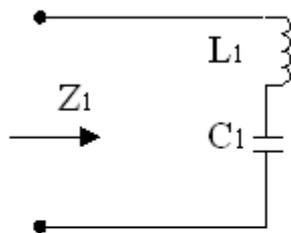
在讨论传输线谐振器以前，让我们先重复一下串联和并联谐振回路的一些基本概念。

图 30(a)是一个 L_1 和 C_1 组成的串联谐振回路，它的谐振频率 ω_0 是：

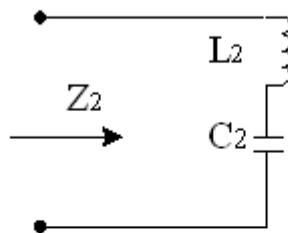
$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}}$$

假如现在还有另外一个串联谐振回路，它由 L_2 和 C_2 组成， $L_2 = L_1$ ，但

$L_2 C_2 = \frac{1}{\omega_0^2}$ ，那么，这个串联回路的谐振频率和前一个回路完全一样，但这两个回路之间究竟有什么差别呢？



(a)



(b)

图 30

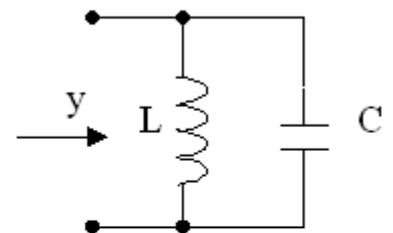


图 31

如果我们计算回路 I 的输入阻抗 Z ，我们得到：

$$Z_1 = j \left(\omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1} \right) = jX_1$$

当 $\omega = \omega_0$ 时, $Z_1=0$ 。但当频率偏离 ω_0 , Z_1 便是一个纯电抗, 根据频率的不同, X_1 的大小也不一样。 我们可以将上式改变一下:

$$\begin{aligned} X_1 &= \omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1} = L_1 \left(\omega - \frac{1}{\omega L_1 C_1} \right) \\ &= L_1 \left(\omega - \frac{\omega_0^2}{\omega} \right) = L_1 \left(\frac{\omega^2 - \omega_0^2}{\omega} \right) \\ &= L_1 \frac{(\omega + \omega_0)(\omega - \omega_0)}{\omega} \end{aligned}$$

变换到这一步, 上式还是完全准确的。当频率 偏离 ω_0 很小时, 我们可以认为:

$$\begin{aligned} \omega + \omega_0 &\approx 2\omega_0 \\ \omega - \omega_0 &\approx \Delta\omega \end{aligned}$$

将以上关系代入, 我们得到:

$$X_1 \approx 2L_1 \Delta\omega$$

于是, 我们得到这样一个结论: 对于一个串联谐振回路来说, 当频率 从 ω_0 偏离一点点, 变成为 $\omega_0 + \Delta\omega$ 时, 输入电抗 X 从零改变成一数值 x , x 是与串联回路的电感 L 成正比。

所以, 对于谐振于同一频率的两个串联回路, 如果它们所用的元件不同, 则当频率偏离 ω_0 时, 这两个回路的反应是不一样的; 具体一点说, 就是它们的输入阻抗的变化是不相等的。对于同一频率增量 $\Delta\omega$, 串联回路的电感 L 愈大, 输入电抗上升愈快。事实上人们正是利用了这个关系, 使从外表看来完全相同的电路结构给出不同的滤波特性。

根据以上的讨论, 我们可以利用微分学上取极限的概念, 把一个串联谐振的电感 L 表示为:

$$L = \frac{1}{2} \frac{dx}{d\omega} \Big|_{\omega_0}$$

在微波技术中，电感 L 已失去了它的具体含义，但在一个谐振腔的入口，

$\frac{dx}{d\omega} \Big|_{\omega_0}$ 仍具有确切的意义。我们之所以要进行以上的数学变换，原因就在此。

人们把一个呈现串联谐振的传输线谐振器的电抗斜率参数，这里用 X 来表示：

$$\omega_0 L = \frac{\omega_0}{2} \frac{dx}{d\omega} \Big|_{\omega_0}$$
 称为它的电抗斜率参数，这里用 X 来表示：

$$\overset{\circ}{X} = \frac{\omega_0}{2} \frac{dx}{d\omega} \Big|_{\omega_0}$$

$\overset{\circ}{X}$ 决定了一个具体串联谐振器在谐振频率 ω_0 附近的特性。应用完全相同的方法，对于图 31 的并联谐振回路，我们可以得到它的输入导纳 Y 为：

$$Y = jB$$

这个并联回路的参数 C 等于：

$$C = \frac{1}{2} \frac{dB}{d\omega} \Big|_{\omega_0}$$

与呈现串联谐振的谐振器的电抗斜率 $\overset{\circ}{X}$ 相对应，人们为并串联谐振器提出电纳斜率参数 $\overset{\circ}{b}$ ：

$$\overset{\circ}{b} = \frac{\omega_0}{2} \frac{dB}{d\omega} \Big|_{\omega_0}$$

$\overset{\circ}{b}$ 决定一个具体并且谐振器在谐振频率 ω_0 附近的特性。

通过以上的讨论，我们把普通串联谐振回路的参数 L 或并联谐振回路的参数 C 与传输线谐振器的一些参数联系起来。

前面已学过，任何一段短路或开路传输线都具有谐振特性。对于终端短路的一段传输线来说，当它的长度 $l = \lambda/4$ 时，它的输入端呈现并联谐振性质；当 $l = \lambda/2$

时, 输入端呈现串联谐振性质。对于终端开路的一段传输线来说, 当它的长度 $l = \lambda_g/4$ 时, 输入端呈现串联谐振; 而 $l = \lambda_g/2$ 时, 输入端呈现并联谐振。不论是微带线、波导或同轴线都具有这种特性。这是在微波滤波器中, 人们能够非常便利地采用的谐振器。

这里让我们比较深入地看一段 $l = \lambda_g/2$ 的终端开路的波导的情况。图 32(a) 表示这样一段矩形波导; (b) 是它的等效线路。它的输入阻抗 Y 是:

$$Y = jY_c \operatorname{tg} \alpha l = jY_c \operatorname{tg} \alpha \frac{\lambda_g}{2}$$

式中的 Y_c 是波导的特性导纳; λ_g 是滤波器的中心导内波长; α 是电磁波在波导内的相位常数:

$$\alpha = \frac{2\pi}{\lambda_g} \quad (10)$$

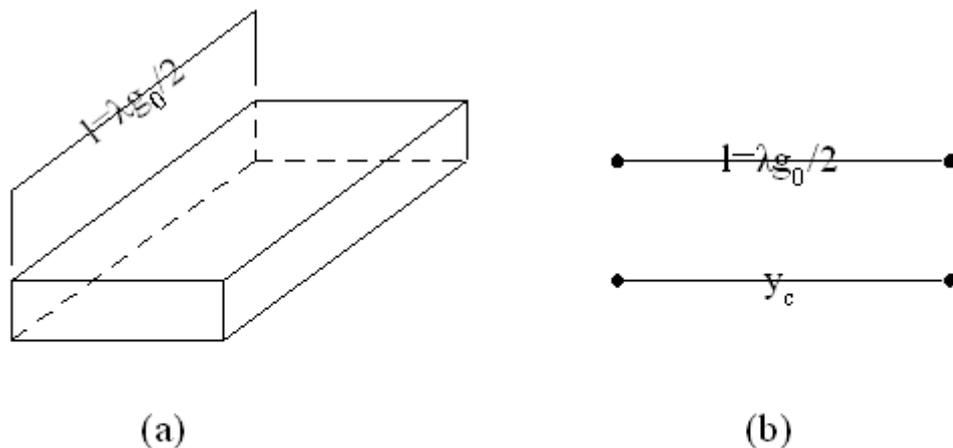


图 32

注意当频率改变时, λ_g 是个变数, $\lambda_g = \lambda_0 / \sqrt{1 - \beta^2}$, 式中给出 $Y = jY_c \operatorname{tg} \alpha l = 0$, 输入端呈现并联谐振。当频率偏离了谐振频率, 导内波长不再等于 λ_g 了。导内波长

的改变引起相位常数 α 的改变(式 10)。这就决定了一个 $\left. \frac{dB}{d\omega} \right|_{\omega_0}$ 。根据以上的讨论如果单从传输线谐振器本身去考虑, 只要通过改变 Y_c 和 l 才能改变电斜

参数 b 、 Y_c 和 c 的调整意味着波导截面尺寸的改变。假如硬要从这方面去解决，一个滤波器的各部分的谐振器必然是一段段尺寸不同的波导，结果将带来极难解决的结构问题。

那么，怎样去改变波导谐振器的电纳斜率参数 \dot{b} 呢？人们在波导谐振器的两端收入两个相同的电抗元件，加模片或感性棒之类。图 33(a) 表示一种具体结构，(b) 是它的等效电路。通过元件电纳值 b 的选择，人们可以在一定范围内改变 \dot{b} 。注意加入电抗元件后，谐振器的长度 l 应随之改变。关于谐振腔长度的计算下面还要专门讨论。

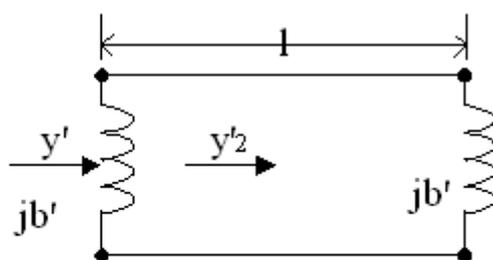


图 33

第二部分 微波滤波器

§ 2-3 倒置器(微波滤波器的特殊问题)

从图 27 中可以看出，带通滤波器各组成部分都是谐振回路，这些谐振回路有些是串联谐振回路，有些是并联谐振回路，前者构成滤波网络的串接臂，后者跨接臂。在波导滤波器中，人们又怎样使图 33(a) 的导波谐振器在一定场合下呈现串联谐振的特性，在另一场合下却呈现并联谐振特性？而且当具有串联谐振回路的作用时，它好象是一个串接臂，而当具有并联谐振回路的作用时，却好似一个跨接臂呢？这就是本节所要解决的问题。

图 34 是一个 $\lambda/2$ 开路传输线谐振器的等效电路。根据传输线理论，当我们将负载 Z 接入谐振器的终端 2-2' 时，在谐振器入口 1-1' 处的输入阻抗应为：

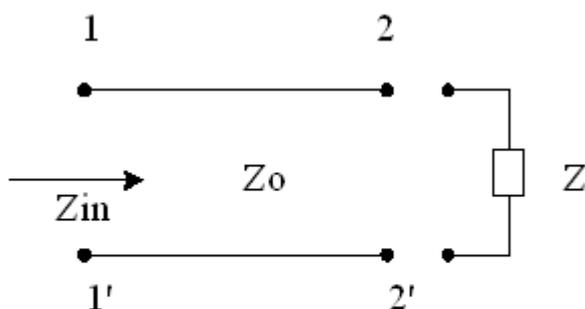


图 34

$$Z'_{in} = \frac{Z' + j \operatorname{tg} \alpha l}{1 + j Z' \operatorname{tg} \alpha l}$$

这里， $\alpha = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{c}$ ，现在 $l = \frac{\lambda_0}{2} = \pi \frac{c}{\omega_0}$ ，故上式可以写成

$$Z'_{in} = \frac{Z' + j \operatorname{tg} \frac{\pi \omega}{\omega_0}}{1 + j Z' \operatorname{tg} \frac{\pi \omega}{\omega_0}}$$

如果我们只参考频率 ω 在谐振频率 ω_0 附近变化的情况(这在滤波器的设计中是可以允许的)。 ω_0 的数值只在 ω_0 的附近变化。在这种情况下，

$$\operatorname{tg} \left(\frac{\pi \omega}{\omega_0} \right) = \pi \left(\frac{\omega - \omega_0}{\omega_0} \right)$$

故输入阻抗的表示式可以写成：

$$Z'_{in} = \frac{Z' + j\pi \left(\frac{\omega - \omega_0}{\omega_0} \right)}{1 + jZ' \pi \left(\frac{\omega - \omega_0}{\omega_0} \right)}$$

现在让我们根据上式看看两种不同的情况。第一种情况是终端入的阻抗较低，即 $|Z'| \ll 1$ 。在这种情况下，上式的右方分母上的第二项与 1（第一项）相比较，可以略去不计。故谐振器入口 1-1' 的输入阻抗大致是

$$Z'_{in} = Z' + j\pi \frac{\omega - \omega_0}{\omega_0}$$

这个关系式右方的第二项代表了传输线谐振器的作用。它在这里起着串联谐振回路的作用（所以这样说是因为它与频率 ω 的函数关系相同于普遍的串联谐振回路），而且它的效果与串接臂上的串联谐振回路相等（从阻抗相加的关系来看）。因此，在终端接入的阻抗较低的情况下，我们得图 35 (a) 的等效电路。

另一种情况是终端接入较高的阻抗，即 $|Z'| \gg 1$ 。在这种情况下，上式的右方分子上的第二项与 Z' 相比较，可以略去不计。故谐振器入口 1-1' 的输入阻抗大致是

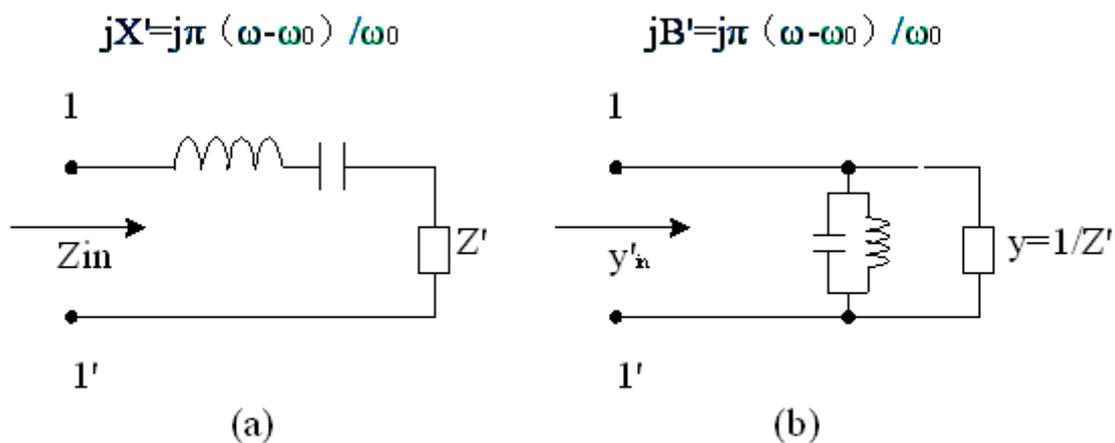


图 35

(a)

$$jX' = j\pi \frac{\omega - \omega_0}{\omega_0}$$

$$Z'_{in} = \frac{Z'}{1 + jZ'\pi \frac{\omega - \omega_0}{\omega_0}}$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{Z'} + j\pi \frac{\omega - \omega_0}{\omega_0}}$$

(b)

$$jB = j\pi \frac{\omega - \omega_0}{\omega_0}$$

以上关系式所包含的意义等于是

$$Y'_{in} = \frac{1}{Z'} + j\pi \frac{\omega - \omega_0}{\omega_0}$$

根据电路原理，上式右方两项的导纳相加代表两个支路的并接。一个支路的导纳

等于 $\frac{1}{Z'}$ ，即原来接入终端的负载。另一支路（这意味着跨接臂了）的导纳是

$j\pi \frac{\omega - \omega_0}{\omega_0}$ ，实际就是一个并联谐振回路的输入导纳。第二个支路反映了传输线谐振器所起的作用。因此，在这种情况下，我们得到了图 35 (b) 所示的等效电路。

同样一个谐振器，由于所接负载的不同，起着截然不同的作用。

那么，人们怎样可以改变负载阻抗的数值呢？我们已经提到 $\lambda/4$ 变换器， $\lambda/4$ 线段具有阻抗倒置特性。在图 36 所示 $\lambda/4$ 线段的一端接入一个阻抗 Z ，设线段的特性阻抗为 K ，则在另一端的输入阻抗将为

$$Z_{in} = \frac{K^2}{Z} \quad (11)$$

适当选择线段的特性阻抗 K ，人们可以调整负载对谐振器所提供的阻抗。象 $\lambda/4$ 线段的这样器件称为倒置器。

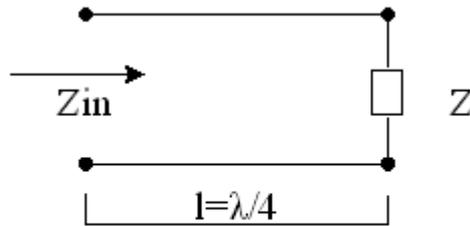


图 36

倒置器的一个更重要的特点是：通过式 (11) 的关系，它能够把接于它终端的阻抗的性质，在它的输入端改变成相反的性质。举例来说，它可以把接于终端的一个电容在它的输入端变成一个电感；或者把接入终端的一个串联电路在输入端变成一个并联电路。所以，如果我们在一个串接元件（例如图 37 (a) 的 L ）的出、入口各接上一个倒置器，则对于外界电路来说，这个串接的元件将起着一个跨接着的，且性能相反的元件的作用（如图 37 (a) 右边等效电路的 C ）。同样，如果我们在跨接元件的两方各接入一个倒置器，则对外界电路来说，这个跨接元件所起的作用相同于一个串接的性质相反的元件，如图 37 (b) 的 C 与 L 。对于图 37 的 C 和 e 的串联和并联电路，倒置器也有改变连接位置和电路性质的作用。

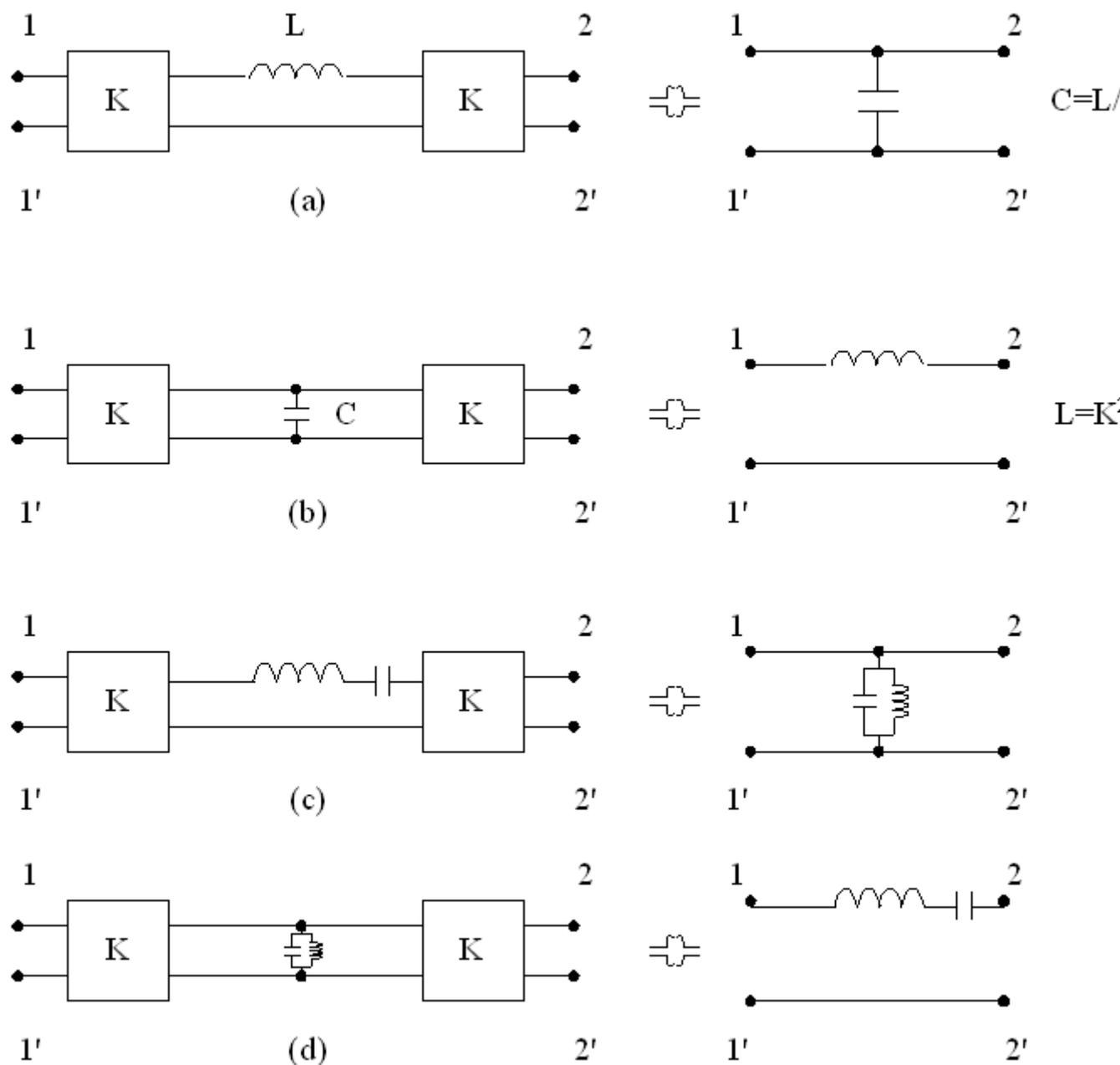


图 37

因此，对于倒置器在滤波网络里面的作用，人们也可以这样去理解：倒置器把图 38 (a) 的既有串接电感又有跨接电容的母型低通滤波器，改变成性能完全相等的只用串接电感（或只用跨接电容）的母型低通滤波器（图 38 (b) 或 (c)）。当然根据后面那种母型滤波器推算出来的其他滤波器自然也就只有串接臂（或跨臂）了。图 38 (b) 的倒置器称为阻抗倒置器或 K 倒置器，(c) 的称为导纳倒置器或 J 倒置器。

应用 $\lambda/4$ 线段作倒置当然简单，但这种线段对频率非常敏感，在宽带带通滤波器中，对工作性能有影响，人们设计出许多其它倒置电路。图 39 给出四种常用的阻抗倒置器，其中以 (c) 用得更多。 Z_0 是主传输线的特性阻抗（当然也就是倒置器所用线段的特性阻抗）， X 是所加感性元件的电抗， l 是倒置线段的电气长度（ $l = \beta l$ ）。在 (c) 的具体情况下，这个长度是一个负数，需由传输线谐振器把它吸收掉，这种倒置器才能实现。

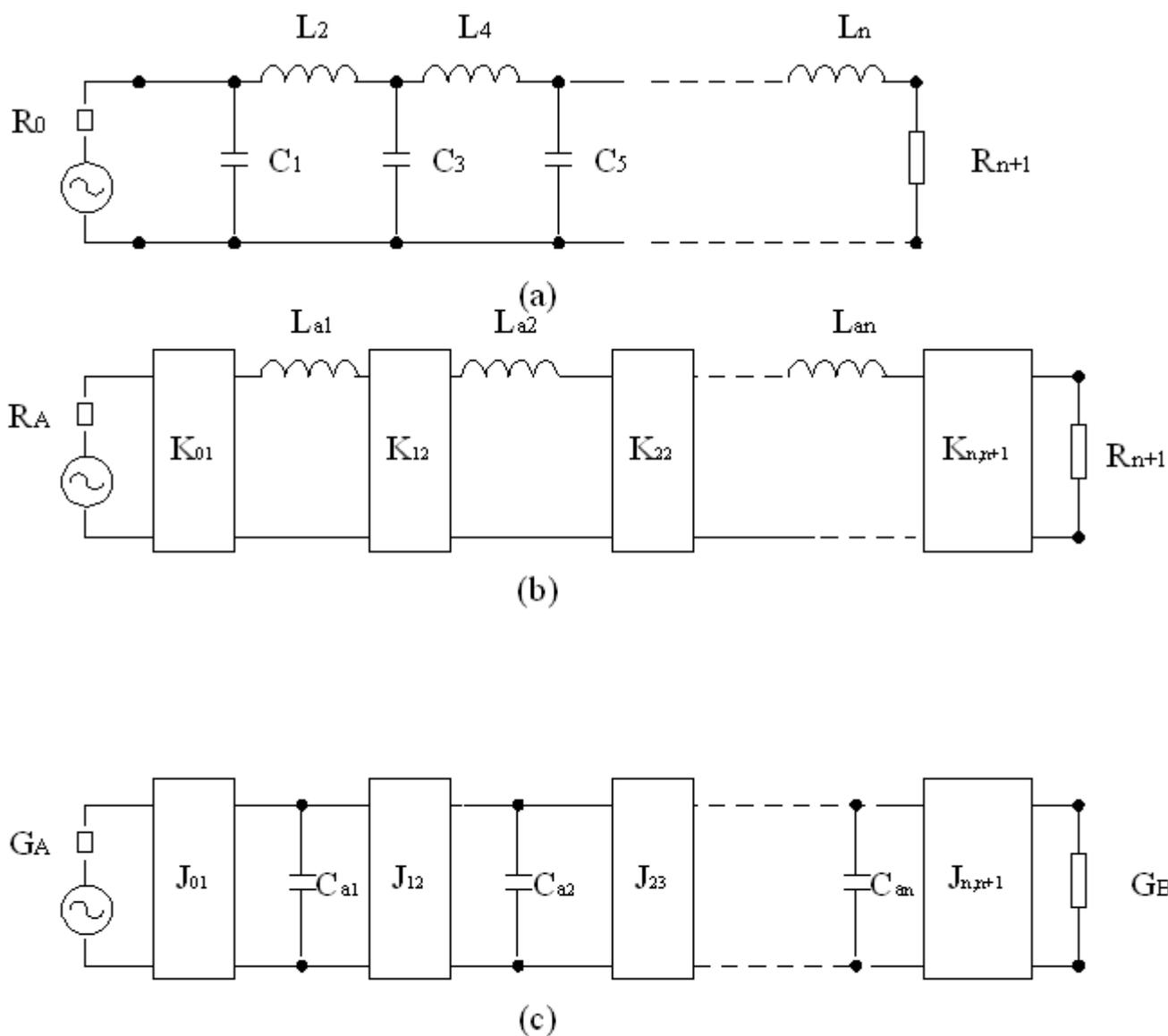
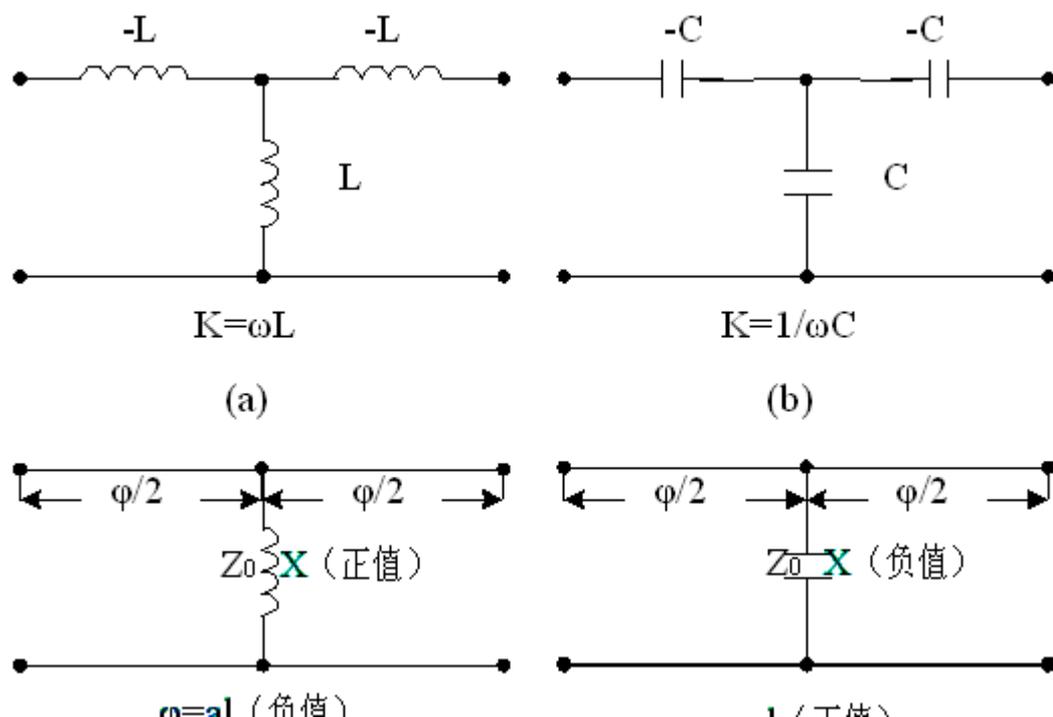


图 38



(c) 和 (d)

$$K = Z_0 \operatorname{tg} \left(\frac{\phi}{2} \right) \quad (\Omega)$$

$$\phi = -\operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{2x}{Z_0} \right) \quad (\text{弧度})$$

$$\left(\frac{x}{Z_0} \right) = \frac{\frac{K}{Z_0}}{1 - \left(\frac{K}{Z_0} \right)^2}$$

第二部分 微波滤波器

§ 2-4 1/4 波长耦合滤波器

从这一节开始,我们就来讨论特殊形式的滤波器----波导滤波器。在前一节中,我们已经组了把由低通滤波器换算成带通的滤波器。进一步变换成清一色的并联(或串联)谐振器间夹一个倒置器的微波上容易实施的形式。参见图 37 (c) 和 (d)。如果我们用 1/4 波长的波导段作为具体的倒置器,再用两个电抗元件电感棒(或电感膜片)夹一段波导作为谐振器来代替图 27 中的串谐振回路,那么,我们就有了图 40 所示的一个称为 1/4 耦合滤波器。

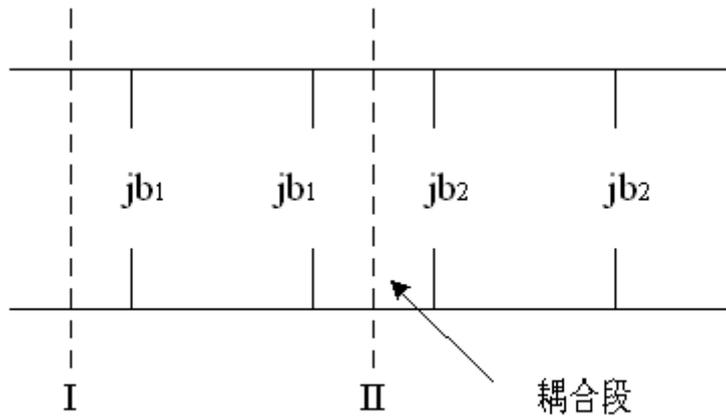


图 40

b_1, b_2 分别代表电感棒（膜片）的电纳归依值。图中没有绘出调整设备。I-II 段为该滤波器的基本单元。该类滤波器就是由这样的基本单元级连而成。将基本单元画于图 41，它是由一个谐振腔组成。谐振腔包括一段电长度为 $\lambda/4$ 的传输线和两个电纳归依值等于 jb 的并联元件，为了书写方便可舍去下标“1”。由于我们讨论窄频带滤波器，假定电纳 b 不随频率变化。在谐振腔二端各延长 $\lambda/4$ ，便与第二谐振腔耦合。

（一） $1/4$ 波长耦合滤波器基本单元的分析方法。

对于图 41 所示的基本单元，我们可以先用通用矩阵 $[a]$ 来求出该单元的插入衰减和插入相移。

在第一部分中，我们已经求出了通用矩阵 $[a]$ 时的插入损耗（衰减）表示式

$$L = \frac{|A + B + C + D|^2}{4} \quad (12)$$

其中， A, B, C 和 D 都是两端对网络的通用矩阵参数。对于无耗的电抗网络， B 和 C 是纯虚数。如果我们假设 $B=jb, C=jc$ ，那么

$$L = \frac{1}{4} |A + D + j(b + c)|^2$$

$$L = \frac{1}{4} [(A + D)^2 + (b + c)^2]$$

又因为无耗网络的情况下：

$$AD - BC = 1$$

以及

$$A = a_{11}, \quad B = ja_{12}, \quad C = ja_{21}, \quad D = a_{22}$$

则上式成了

$$\begin{aligned} a_{11}a_{22} - (ja_{12})(ja_{21}) &= 1 \\ a_{11}a_{22} + a_{12}a_{21} &= 1 \end{aligned}$$

式 12 就成了：

$$L = 1 + \frac{1}{4}(a_{11} - a_{22})^2 + \frac{1}{4}(a_{12} - a_{21})^2$$

插入相移为：

$$\phi = \operatorname{tg}^{-1} \frac{a_{12} + a_{21}}{a_{11} + a_{22}} \quad (13)$$

又因为一般滤波网络具有对称结构，所以有

$$a_{11} = a_{22}$$

这样插入损耗公式就简化为：

$$L = 1 + \frac{1}{4}(a_{12} - a_{21})^2$$

对于图 41 所示的谐振腔，如果不考虑二端 $\lambda/2$ 的耦合长度，其[a]矩阵可以写为：

$$\begin{aligned}
[\mathbf{a}] &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ jb & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & j \sin \theta \\ j \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ jb & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \cos \theta & j \sin \theta \\ jb \cos \theta + j \sin \theta & \cos \theta - b \sin \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ jb & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \cos \theta - b \sin \theta, & j \sin \theta \\ j[2b \cos \theta + (1 - b^2) \sin \theta], & \cos \theta - b \sin \theta \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1, & jm \\ jn, & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

式中：

$$\begin{aligned}
l &= \cos \theta - b \sin \theta \\
m &= \sin \theta \\
n &= 2b \cos \theta + (1 - b^2) \sin \theta
\end{aligned}$$

根据式 (12) 插入衰减是

$$\begin{aligned}
L &= 1 + \frac{1}{4}(m - n)^2 \\
&= 1 + b^2 \left(\cos \theta - \frac{b}{2} \sin \theta \right)^2 \\
&= 1 + x^2
\end{aligned}$$

(14)

式中

$$x = b \left(\cos \theta - \frac{b}{2} \sin \theta \right)$$

由式 (13) 可知，插入相移是

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{a_{12} + a_{21}}{a_{11} + a_{22}} = \frac{m + n}{2l} = \frac{b \cos \theta + \left(1 - \frac{b^2}{2}\right) \sin \theta}{\cos \theta - b \sin \theta}$$

在中心波长时，应当是完全传输，插入衰减应为零分贝，故 $L=1$ ，即 $m=n$ ， $x=0$ ，所以相应的谐振腔长 l_0 （电长度）为

$$x = b(\cos \theta_0 - \frac{b}{2} \sin \theta_0) = 0$$

$$\operatorname{tg} \theta_0 = \frac{2}{b} \quad \text{或} \quad \theta_0 = \operatorname{tg}^{-1} \frac{2}{b}$$

(15)

机械长度为

$$\frac{2\pi l}{\lambda_{g_0}} = \operatorname{tg}^{-1} \frac{2}{b}$$

$$l = \frac{\lambda_{g_0}}{2\pi} \operatorname{tg}^{-1} \frac{2}{b}$$

(16)

λ_{g_0} 为中心波导波长。

现在，我们的空腔没有封闭，两边是电感棒（或电感、电容膜片），如果是电容膜片，则 b 值为正，由式（15）可知： θ_0 可以从 0 到 $\pi/2$ 之间变化，由式（16）可知：其机械长度 $l < \lambda_{g_0}/4$ 。通常用的是电感棒（或电感性膜片），则 b 为负值，于是 θ_0 从 $\pi/2$ 到 π ，机械长度 $l > \lambda_{g_0}/4$ 。这一现象从物理概念上是可以理解的。电容起加长谐振腔长度的作用，所以谐振腔必须短一些。电感起缩短谐振腔长度的作用。所以谐振腔必须长一些。

如果并联电纳 b 远大于 2 ，则 θ_0 约等于 $\pi/2$ ， l 约等于 $\lambda_{g_0}/2$ ，将 θ_0 代入式 16，可以得到中心波长时的插入相移

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = -\frac{2}{b} = \operatorname{tg}(\pi - \theta_0)$$

$$\varphi_0 = \pi - \theta_0$$

(17)

如果考虑到谐振腔两端各接上 $\lambda/2$ 的传输线 (图 41), 则 [a] 矩阵为

$$\begin{bmatrix} \cos \frac{\varphi}{2} & j \sin \frac{\varphi}{2} \\ j \sin \frac{\varphi}{2} & \cos \frac{\varphi}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & jm \\ jn & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \frac{\varphi}{2} & j \sin \frac{\varphi}{2} \\ j \sin \frac{\varphi}{2} & \cos \frac{\varphi}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l' & jm' \\ jn' & l' \end{bmatrix}$$

式中

$$l' = 1 \cdot \cos \varphi - \frac{1}{2}(m+n) \sin \varphi$$

$$m' = 1 \cdot \sin \varphi + \frac{1}{2}(m+n) \cos \varphi + \frac{1}{2}(m-n)$$

$$n' = 1 \cdot \sin \varphi + \frac{1}{2}(m+n) \cos \varphi - \frac{1}{2}(m-n)$$

此时的插入衰减

$$L = 1 + \frac{1}{4}(m'-n') = 1 + \frac{1}{4}(m-n)$$

可见, 参考谐振腔两端耦合段后, 谐振腔的电长度 θ_0 不变, 仍满足式 (14)。但插入相移将随耦合段的电长度变化。在中心波长下, 谐振腔两端的耦合长度 $\lambda/2$ 。通常取

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = -\frac{b}{2}$$

将式 (17) 代入上式得

$$\varphi_0 = \theta_0 - \frac{\pi}{2}$$

$$\theta_0 = \varphi_0 - \frac{\pi}{2}$$

因此，基本单元图 41 可绘成图 42 所示的那样，图中标出的都是中心波长下的电长度。

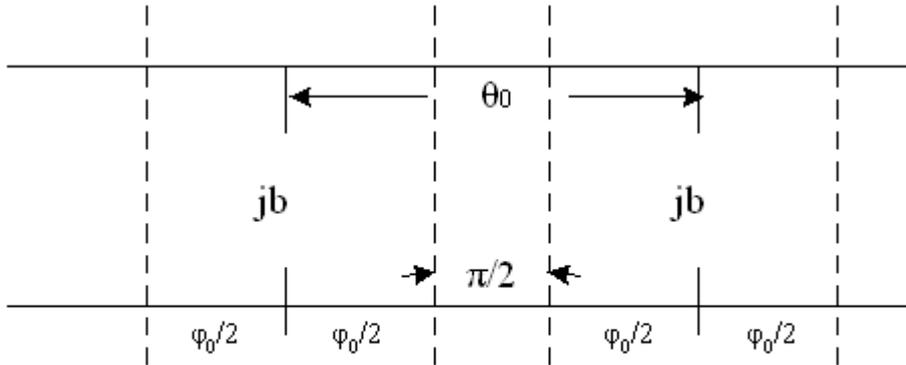


图 42

(二) 谐振腔的 Q 值

插入衰减也可用四端网络的有载 Q_L 来表示为

$$L = 1 + \left(Q_L \frac{2\Delta f}{f_0} \right)^2$$

与式 (14) 比较得

$$x = Q_L \frac{2\Delta f}{f_0}$$

式中， f_0 为中心频率。 f 为工作频率与中心频率之差。

根据定义：

$$Q_L = \frac{f_0}{f_2 - f_1}$$

式中 f_0 为中心频率， f_2 和 f_1 分别是

$$\left[Q_L \frac{2\Delta f}{f_0} \right] = \pm 1$$

时的频率，即半功率点的频率。

但是，在波导中，主要的特性都是以波导波长 λ_g 作为变量的，所以，这时

$$Q_L = \frac{\frac{1}{\lambda_{g0}}}{\frac{1}{\lambda_{g2}} - \frac{1}{\lambda_{g1}}}$$

或

$$Q_L = \frac{\frac{2\pi l}{\lambda_{g0}}}{\frac{2\pi l}{\lambda_{g2}} - \frac{2\pi l}{\lambda_{g1}}} = \frac{\theta_0}{\theta_2 - \theta_1} \quad (18)$$

现在就要找出 θ_1 和 θ_2 ，我们还是从插入衰减的公式着手。找 θ_0 时，令 $x=0$ 。现在，我们令 $x=\pm 1$ ，则有

$$\begin{aligned} x &= b \left(\cos \theta - \frac{b}{2} \sin \theta \right) \\ &= b \sqrt{1 + \frac{b^2}{4}} \sin \left(\theta - \operatorname{tg}^{-1} \frac{2}{b} \right) = \pm 1 \end{aligned}$$

解得：

$$\theta_1 = \theta_0 - \sin^{-1} \frac{2}{b\sqrt{b^2+4}}$$

$$\theta_2 = \theta_0 + \sin^{-1} \frac{2}{b\sqrt{b^2+4}}$$

代入式(18)得

$$Q_L = \frac{\theta_0}{\theta_2 - \theta_1} = \frac{\operatorname{tg}^{-1} \frac{2}{b}}{2 \sin^{-1} \frac{2}{\sqrt{b^4+4b^2}}} \quad (19)$$

如果 b 很大, 因而 $2^*(b^4+4b^2)^{-1/2}$ 很小, 则上式近似地可用下式表示:

$$Q_L = \frac{\sqrt{b^4+4b^2}}{4} \operatorname{tg}^{-1} \frac{2}{b} \quad (20)$$

在这里, 有一点要说明: 式(20)只适用于非色散的传输线中。即: 在此情况下, $\omega = \omega_g$ 。但是, 在有色散的传输线中, 例如波导中传播横电波(TE₁₀波)时: ω_0 和 ω_g 是非线性关系的, 这就有以前推导出的结果。

$$Q_L(f) = \frac{f_0}{f_2 - f_1} = \frac{f_0}{2\Delta f}$$

$$Q_L\left(\frac{1}{\lambda_0}\right) = \frac{c/\lambda_0}{c/\lambda_2 - c/\lambda_1} = \frac{\frac{1}{\lambda_0}}{\frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1}}$$

$$Q_L\left(\frac{1}{\lambda_g}\right) = Q_L\left(\frac{\lambda_{g0}}{\lambda_0}\right)^2 \quad (21)$$

所以考虑了色散的影响, 谐振腔的有载 Q_L 会增加 $(\lambda_{g0}/\lambda_0)^2$ 倍。这在波导滤波器的设计中是很重要的概念。而且, 把谐振腔的有载 Q_L 值与波导两端的加载电纳 b 联系起来, 为滤波器设计打通了道路。

不过，在正式讲 $\pi/4$ 耦合滤波器的设计以前，我们还必须把谐振腔的有载 Q_L 和低通原型滤波器的各元件值挂上钩。

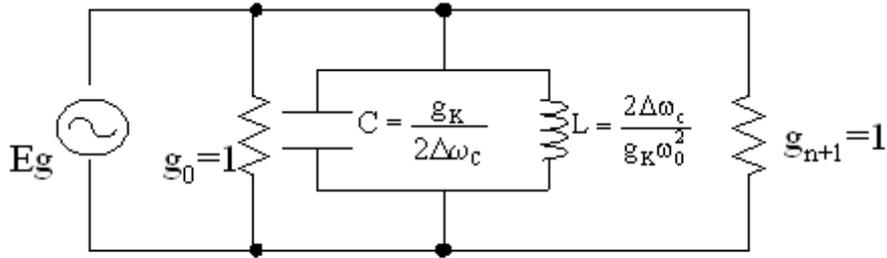


图 43

通过低通变换到带通，又用 $\pi/4$ 倒置器，我们可以把有串联谐振回路又有并联谐振回路的带通电路变换成只有并联谐振回路组成的滤波器。如图 43 所示。为了清楚起见，先画了一个并联谐振回路。其中 g_k 是低通原型滤波器的元件值。这个谐振回路的负载和电源内阻均为归一化电导， $G_0 = G_{n+1} = 1$ ，所以并联在各谐振回路上的损耗电导是 $1+1=2$ ，于是回路 Q 值为：

$$Q_K = \frac{\omega_0 C}{G} = \frac{\omega_0 C}{2}$$

把

$$C = \frac{g_k}{2\Delta\omega_0}$$

代入上式，则

$$Q_K = \frac{\omega_0}{2\Delta\omega_0} \cdot \frac{g_k}{2} = Q_T \frac{g_k}{2}$$

(22)

式中：

$$Q_T = \frac{\omega_0}{2\Delta\omega_0}$$

称为集中参数带通滤波器的总 Q ， Q_k 是第 K 个支路的 Q 。这式表明：带通滤波器的第 K 个谐振回路的 Q 值是低通母型滤波器的归一化元件值 g_k 乘以 $Q_T/2$ 。加上前面已讨论的谐振腔的 Q 和两边的电纳 b 之间的关系，这样，在设计波导带通滤波器的过程中的特殊问题，算是解决了一半，从低通母型变换到了波导型带通滤波这种特殊的微波结构。另一半是什么呢？这就是解决 $\lambda_g/4$ 线段阻抗倒置变换器特性，以及，另一个重要课题，在波导中的电感是什么样的？如何计算？所以，我们再用两小节来讲述它们。不过，由于，波导中的电感棒问题又是一个很复杂和烦琐的工程问题，而且又涉及许多应用数学，故我们只打算给出具体的计算公式。而不详细去推导它们。

(三) $\lambda_g/4$ 阻抗倒置器的特性

如前所述，在波导谐振腔之间相互距离 $\lambda_g/4$ 线段的目的，主要起到阻抗变换的作用。解决用并联谐振回路来代替串联谐振回路。同时，各谐振腔相距 $\lambda_g/4$ ，还可以起到各元件之间相互隔离作用。在设计滤波器时，我们通常是假设各个电感、电容元件是相互间没有互电容和互电感的理想元件。在低频时适当采取屏蔽措施，做到互电容、互电感可以忽略是可能的，但在微波波段各元件都安置在一个波导管内，采取屏蔽措施是不可能的。因而安置各个谐振腔，使它们之间相距 $\lambda_g/4$ ，会收到大大削弱相互影响从而使互阻抗可忽略不计。

下面，我们分析 $\lambda_g/4$ 波导线段的阻抗倒置器的特性。为此，我们考虑图 44 的情况，图中令波导段传输线的长度为 l ，终端联结一谐振腔。其等效电路用 LC 回路代表，同时，并联一匹配电导 Y_0 。如果不它表示为归一化的通用形式，按照过去的分析，在谐振频率附近的谐振腔归一化导纳值用 B 表示，则根据公式， B 可表示为：

$$\Delta B = Q_P 4 \lambda_{g_0} \Delta \left(\frac{1}{\lambda_{g_0}} \right)$$

B 与 $(1/\lambda_g)$ 都表示在谐振频率附近谐振腔归一化导纳 B 值与波导波长的倒数 $1/\lambda_g$ 的微小变化值，考虑谐振腔并联 Y_0 效应在内，终端负载导纳 Y 的表示式(在谐振频率附近)可写为：

$$Y = Y_0 \left[1 + j4Q_P \lambda_{g_0} \Delta \left(\frac{1}{\lambda_g} \right) \right] \quad (23)$$

$$\lambda_{g_0} \Delta \left(\frac{1}{\lambda_g} \right) = \delta$$

再令

则上式可写为：

$$Y = Y_0 [1 + j4Q_P \delta] \quad (24)$$

由传输线的关系式可知，图 44 中的 A-A 处的输入导纳 Y_{in} 应为：

$$Y_{in} = Y_0 \frac{Y \cos \theta + Y_0 j \sin \theta}{Y_0 \cos \theta + Y j \sin \theta} \quad (25)$$

式中：

$$\theta = \frac{2\pi l}{\lambda_g}$$

把式 (24) 代入式 (25) 则得：

$$\frac{Y_{in}}{Y_0} = \frac{(1 + j4Q_P \delta) \cos \theta + j \sin \theta}{\cos \theta + j(1 + j4Q_P \delta) \sin \theta} \quad (26)$$

取 $l = \lambda_{g_0} / 4$ ，则得谐振频率时的 θ_0 为：

$$\theta_0 = \frac{2\pi l}{\lambda_{g_0}} = \frac{\pi}{2}$$

当频率离开谐振点时， $1/\lambda_g$ 也由 $1/\lambda_{g_0}$ 变为 $1/\lambda_{g_0} + (1/\lambda_g)$ ，因此可得 θ 的表示式为：

$$\theta = \frac{2\pi l}{\lambda_g} = 2\pi l \left[\frac{1}{\lambda_{g_0}} + \Delta \left(\frac{1}{\lambda_g} \right) \right] = \frac{\pi}{2} (1 + \delta)$$

我们考虑的是窄频率的情况，因而 $\delta \ll 1$ ，故近似可得：

$$\cos \theta = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \delta\right) = -\sin\left(\frac{\pi \delta}{2}\right) \approx -\frac{\pi \delta}{2}$$

$$\sin \theta = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \delta\right) = \cos\left(\frac{\pi \delta}{2}\right) \approx 1$$

把它们代入式(26)，则得：

$$\frac{Y_{in}}{Y_0} \approx j \frac{\pi \delta}{2} + \frac{1}{1 + j\left(4Q_P \delta + \frac{\pi \delta}{2}\right)} \quad (27)$$

由式(27)可知 $\pi/2$ 项的出现是由于线段在频率变化时引起的相位变化的结果，这完全由于加进了 $\pi/4$ 线段，若忽略 $(\pi/2)$ 项则由式(27)可得：

$$\frac{Y_{in}}{Y_0} \approx \frac{1}{1 + j(4Q\delta)}$$

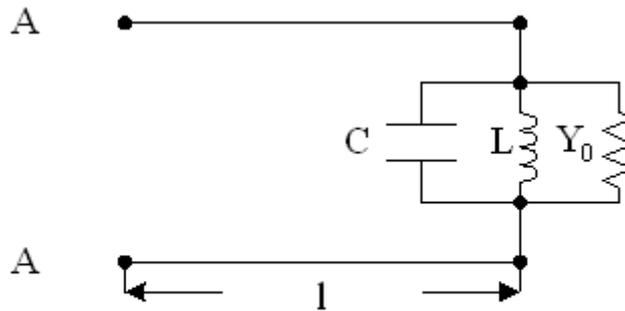


图 44

亦即 A-A 端的输入阻抗变为：

$$\frac{Z_{in}}{Z_0} = \frac{Y_0}{Y_{in}} \approx 1 + j(4Q\delta) \quad (28)$$

上式表示 $\lambda_g/4$ 线段可看作一个理想的阻抗倒置器（其阻抗倒置作用与频率特性无关），它可以起到把并联谐振回路变为串联谐振回路的作用。由于波导谐振腔都是并联结构，因而加 $\lambda_g/4$ 的波导段就可以获得等效电路必须的串联谐振回路。但这是在忽略 $\lambda_g/4$ 线段频率特性影响（忽略 $(\dots)/2$ 项）的结果，为了考虑此影响，我常常采取修正谐振腔的 Q_p 值方法，以使 $\lambda_g/4$ 线段等效于一理想阻抗倒置器。对此方法的原理在下面加以叙述。

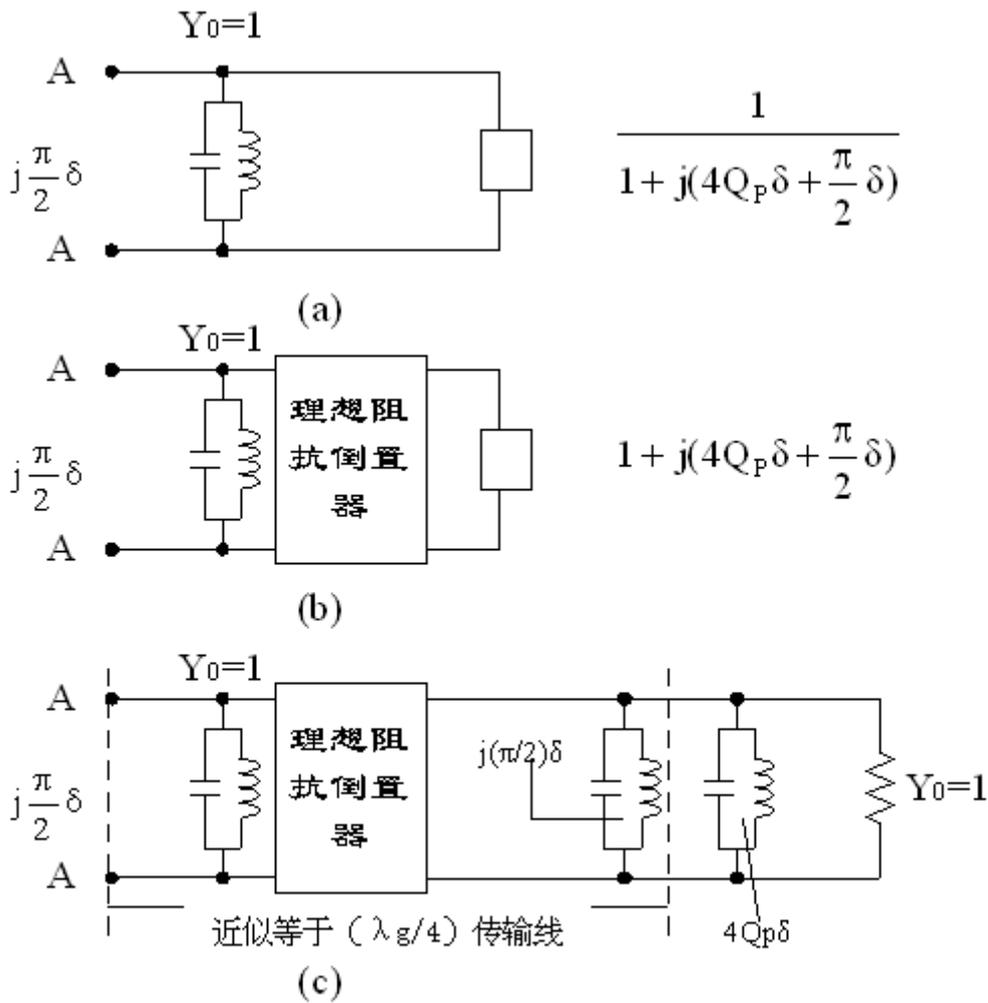


图 45

由公式 (27)，可将 A-A 端输入导纳画成图 45 的等效特性图。图 45 (a) 是式 (27) 的结果。而图 45 (a) 等效于图 45 (b)，在图 (b) 中，引入理想倒置器以使 $1 + j(4Q_p + (\dots)/2)$ 导纳，而这个图 (b) 又可用图 (c) 来等效。图 (c) 中，将谐振回路 $j(4Q_p + (\dots)/2)$ 分裂成两个谐振回路并联 ($j(\dots)/2$ 与 $4Q_p$ 两个回路)。由图 45 (c) 可见， $\lambda_g/4$ 波导传输线近似等效于一个理想阻抗倒置，不过此变换器两端还接有归一化导纳为 $j(\dots)/2$ 的谐振回路，也就是图 45 (c) 虚线之间的电路可近似等于图 45 中长为 $l = \lambda_g/4$ 那段线的作用。这由物理意义来讲是把阻抗倒

置器的分布参数频率特性分离出来，而用一个集中参数的电路频率来代表。

从上面知道，这种阻抗倒置器的频率特性，相当于 $Q = \beta/8$ 的并联谐振电路。为了消除这种频率特性，我们是这样做的：把阻抗倒置器两边的那两个支路的 Q_p 中扣除 $\beta/8$ ，也就是在设计谐振电路时， Q_p 中有意减去 $\beta/8$ ，这个正好由阻抗倒置器产生的 $Q = \beta/8$ 的谐振电路来补足。

让我们回顾图 40，可见除第一个回路和最末第 n 个回路外，其他的回路都与两个 $g/4$ 线相接，（左右都是 $g/4$ 线），所以这样的回路， Q_p 应扣除 $\beta/4$ ，而第一个回路和第 n 个只要扣除 $\beta/8$ ，即

$$Q'_P = Q_P - \frac{\beta}{8} \pi \quad (29)$$

上式中当 $K=1$ 和 n 时， $\beta=1$ ，而当 K 为其他值时 $\beta=2$ 。同样我们可推论出采用 $3g/4$ 线段也可作为阻抗倒置器，而此时其频率特性所产生的谐振回路的 Q 值应为 $3\beta/8$ ，应用更长的线段也可以，但由于体积太大，故很少用，此时其频率特性产生的谐振回路的 Q 值也可以类推。

由于式(29)的结果，设计带通滤波器时计算谐振腔本身 Q_p 值的公式(22)应修正为：

$$Q_P = \frac{\sqrt{B^4 + 4B^2}}{4} \operatorname{tg}^{-1} \frac{2}{B} = \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_{g_0}} \right)^2 Q_T \frac{g_K}{2} - \frac{\beta}{8} \pi \quad (30)$$

由上式可见，考虑了 $g/4$ 线段的频率特性，在设计时谐振腔本身 Q_p 值需较式(18)进一步缩小才能满足要求值。

(四) 电感棒计算公式

因为圆柱电感棒易于加工，结构简单，我们通常用圆柱电感棒来实现设计计算得出的 B_1 值。由于圆柱销钉为电感性，相应的 B_1 值为负数，从而由式(16)得到：

$$\operatorname{tg} \left(\frac{2\pi l}{\lambda_{g_0}} \right) = \frac{2}{B} = \text{负数}$$

因此由圆柱销钉作 B 时求得的谐振腔的长度 l 应在 $\lambda_g/4$ 与 $\lambda_g/2$ 之间。

对穿波导的金属圆柱销钉 B 的计算公式如下：

两棒时：

$$-B_2 = \frac{12\lambda_g}{a \left[11.63 - 9.21 \lg \frac{a}{r} - 22.8 \frac{r}{a} - 0.22 \left(\frac{a}{\lambda} \right) \right]^2}$$

三棒时：

$$-B_3 = \frac{16\lambda_g}{a \left[12.83 - 9.21 \lg \frac{a}{r} - 30.3 \frac{r}{a} - 0.125 \left(\frac{a}{\lambda} \right) \right]^2}$$

四棒时：

$$-B_4 = \frac{20\lambda_g}{a \left[13.75 - 9.21 \lg \frac{a}{r} - 37.9 \frac{r}{a} - 0.08 \left(\frac{a}{\lambda} \right) \right]^2}$$

其中 r 为圆柱的半径，a 为波导宽边， λ_g 为波导波长， λ 为工作波长。这些公式，计算颇繁，还可以查表 l。至此为止，除了电感棒公式没有详细推导，别的内容都作了仔细的推导。所以这样做，是希望读者知道理论研究工作的内容，这么一个小小的波导滤波器，居然涉及了这么多的内容。而且，在以后的学习中，在弄通了这些内容，又可以对其他学习有很大的帮助。

第二部分 微波滤波器

§ 2-5 1/4 波长耦合滤波器的设计

根据上面分析计算结果,对于波导型带通滤波器的设计计算的步骤,以及设计的数字实例综述于下:

1. 技术指标

在时间带通滤波器时,通常给的技术指标有:

1. 中心频率 f_0
2. 偏离中心频率为 f_1 时的衰减 L_{A1}
3. 偏离中心频率为 f_2 时的衰减 L_{A2}
4. 中心频率处的衰减

在以前介绍的所有公式中,没有计算中心频率处衰减的公式。中心频率处的衰减是由于热损耗,实际上是给工艺提出了要求,即为了降低中心频率处衰减,必须改进焊接技术、部件光洁程度。

2. 设计步骤

1. 根据要求选择滤波器的类型:最大平滑式还是切比雪夫式(这时又要确定出波纹系数 λ)
2. 确定腔数:在(1)的基础上选出 n 。(查表或计算都行)

$$Q_T = \frac{\omega_0}{2\Delta\omega_0}$$

3. 计算滤波器的 Q_T :由 计算要求的 Q_T 值。
4. 计算各腔的 Q_P :利用式 30 决定各腔的 Q_P 值。
5. 求 B 值:根据查注 1 确定出 B 值。
6. 确定各腔长度利用式 16,得

$$l_i = \frac{\lambda_{g0}}{2\pi} \left(\pi - \operatorname{tg}^{-1} \frac{2}{|B_i|} \right) \times 0.985$$

是修正值(即使腔长于先缩短,这样工作频率也就高于原设计值了;然后,调动腔上的螺钉向腔内,逐渐降低了腔的谐振频率,直至设计值),来决定各个腔的长度。

7. 决定阻抗倒置器长度:利用式(31)决定各段阻抗倒置器的长度。
8. 选用电感棒,利用§2-4节中的(3)中列出的公式确定电感棒尺寸,从经验与制造的角度来讲销钉太粗与太细都不好做。4GHz系统的滤波器,棒径选在1到3毫米之间是比较合适的。如果算得的三棒的棒径小于1毫米时,则可选用二棒公式试算。

3. 实例：

1. 给定指标:

$$f_0 = 3829\text{MHz}$$

$$\Delta f_1 = \pm 12\text{MHz}, \quad L_{A_1} \leq 0.7\text{db}$$

$$\Delta f_2 = \pm 70\text{MHz}, \quad L_{A_2} \geq 48\text{db}$$

$$\Delta f_3 = \pm 154\text{MHz}, \quad L_{A_3} \leq 80\text{db}$$

2. 根据上述指标，没有明确给出中心频率处的允许的热损耗，以及通带内的允许波纹值，一般可选最大平滑式，但是，目前有一种倾向，选 0.1db 切比雪夫滤波器，它是各种指标都颇到的最佳折衷方案，因为在一般微波滤波器中，热损耗（中心频率处为准）都远大于 0.1db。所以 0.1db 的波纹是最后特性上体现不出来的，我们选最大平滑式。
3. 确定腔数：

理论推导上很重视 3 db 处的频率，还取了一个专用名词-带通。

$$\Delta\omega_c = \omega_{c_2} - \omega_{c_1}$$

其它的止带频率还可以用它来作基准，算出其相对频率。不过，也有光给出感兴趣的频率，用它们来确定滤波器的腔数。这样，原先的公式零值一定的变化，最大平滑滤波器的插入损耗和频率之间的表示式为：

$$L_A = 10 \lg \left[1 + \left(\frac{\Delta\omega}{\Delta\omega_c} \right)^2 \right]$$

在不知 $\Delta\omega_c$ 的情况下，我们可以直接把它们都代入上式，而且它们相除一下就有

$$n = \frac{1}{2} \left[\lg \left(10^{\frac{L_{A1}}{10}} - 1 \right) - \lg \left(10^{\frac{L_{A2}}{10}} - 1 \right) \right] / \lg \left(\frac{\Delta\omega_2}{\Delta\omega_1} \right)$$

$$n = \frac{1}{2} \left[\lg \left(10^{\frac{0.7}{10}} - 1 \right) - \lg \left(10^{\frac{48}{10}} - 1 \right) \right] / \lg \left(\frac{12}{70} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left[\lg(0.175) - \lg(10^{4.8} - 1) \right] / (-0.766)$$

$$= 3.62$$

将 Δf_2 , Δf_3 , L_{A_2} , L_{A_3} 代入

$$n = \frac{1}{2} \left[\lg \left(10^{\frac{48}{10}} - 1 \right) - \lg \left(10^{\frac{80}{10}} - 1 \right) \right] / \lg \left(\frac{70}{154} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left[4.8 - 8.0 \right] / (-0.342)$$

$$= 4.68$$

考虑到实际波导滤波器有热损耗，带外衰减应有富裕，所以，选 $n=5$ ，即确定这个滤波器应是五腔带通滤波器。

4. 求 3db 带宽，用下列式

$$\Delta f_c = \Delta f \sqrt[2n]{10^{\frac{L_A}{10}} - 1}$$

代入 Δf_1 、 L_{A1} 和 $n = 5$ 得

$$\Delta f_c = 12 \sqrt[10]{10^{0.07} - 1} = 13(\text{MHz})$$

$$\therefore 2\Delta f_c = 26\text{MHz}$$

代入 Δf_2 、 L_{A2} 和 $n = 5$ 得：

$$\Delta f_c = 71 \sqrt[10]{10^{4.8} - 1} = 23.3(\text{MHz})$$

$$\therefore 2\Delta f_c = 46.6\text{MHz}$$

代入 Δf_3 、 L_{A3} 和 $n = 5$ 得：

$$\Delta f_c = 154 \sqrt[10]{10^8 - 1} = 24.4(\text{MHz})$$

$$\therefore 2\Delta f_c = 48.8\text{MHz}$$

参考上面 2 f_c 的三个数据，我们选 2 $f_c = 46\text{MHz}$

5. 计算谐振腔 $Q_{T腔}$

$$Q_{T腔} = \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_{g0}} \right)^2 Q_T = \frac{f_2}{f_{C1} - f_{C2}} \left[1 - \left(\frac{\lambda_0}{2a} \right) \right]$$

$$f_{C1} - f_{C2} = 2\Delta f_c = 46\text{MHz}、f_0 = 3829\text{MHz}$$

$$\lambda_0 = 78.34\text{mm}、2a = 116\text{mm}$$

$$Q_{T腔} = \frac{3829}{46} [0.545] = 45.4$$

6. 计算各腔 Q_p 值

$$Q_1 = Q_5 = \left(Q_{\text{T腔}} \cdot \frac{g_1}{2} \right) - \frac{\pi}{8} = 45.4 \times 0.39 - 0.39 = 13.63$$

$$Q_2 = Q_4 = \left(Q_{\text{T腔}} \cdot \frac{g_2}{2} \right) - \frac{\pi}{4} = 45.4 \times 0.809 - 0.785 = 35.615$$

$$Q_3 = \left(Q_{\text{T腔}} \cdot \frac{g_3}{2} \right) - \frac{\pi}{4} = 45.4 \times 1 - 0.785 = 44.615$$

7. 确定 B 值

利用注 1 查得

$$B_1 = B_5 = -4.25, \quad B_2 = B_4 = -6.95, \quad B_3 = -7.6$$

8. 计算各腔长度

$$\text{公式: } l_i = \frac{\lambda_{g_0}}{2\pi} \left(\pi - \text{tg}^{-1} \frac{2}{|B_i|} \right) \times 0.985$$

$$l_1 = l_5 = \frac{106.25}{2\pi} (\pi - 0.14\pi) \times 0.985 = 45\text{mm}$$

$$l_2 = l_4 = \frac{106.25}{2\pi} (\pi - 0.0819\pi) \times 0.985 = 47.7\text{mm}$$

$$l_3 = \frac{106.25}{2\pi} (\pi - 0.0817\pi) \times 0.985 = 48.1\text{mm}$$

9. 计算阻抗倒置器

$$l_{i,i+1} = \frac{l_i + l_{i+1}}{2} - \frac{\lambda_{g_0}}{4} - \frac{\alpha \lambda_{g_0}}{2\pi}$$

$$l_{12} = l_{45} = \frac{45 + 47.7}{2} - 26.56 - 0.508 = 19.23\text{mm}$$

$$l_{23} = l_{34} = \frac{47.7 + 48.1}{2} - 26.56 - 0.508 = 20.83\text{mm}$$

(31)

10. 选用棒径

$$\phi_1 = \phi_5 = 1.98\text{mm}, \quad \phi_2 = \phi_4 = 1.67\text{mm}, \quad \phi_3 = 1.85\text{mm}$$

第一和第五腔采用两棒，其他是三棒，最后选取棒径的值，是根据实验后的数据来定。

滤波器几何尺寸的计算到此全部完成，所求得尺寸数据，现归纳为结构图。

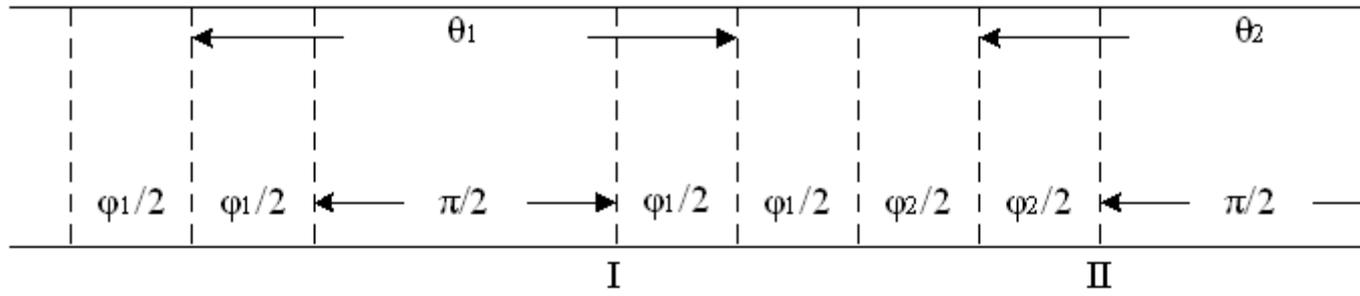
以上我们举了一个实例，把带滤波器的设计计算进行了一遍。正如任何微波器件一样，设计计算不过是设计的一部分，还有更重要的一部分是实际验证和调试，绝不能认为计算出来了，设计便算完了。不经过实践验证的东西是不能采用的。另一方面，没有理论指导的实践是盲目的实践。就拿上面的带通滤波器来说，如果一点理论根据也没有，我们知道究竟应采用几个谐振腔，他们的长度应该是多少，电感棒应该用几根，粗细如何？可以说简直无从下手。

第二部分 微波滤波器

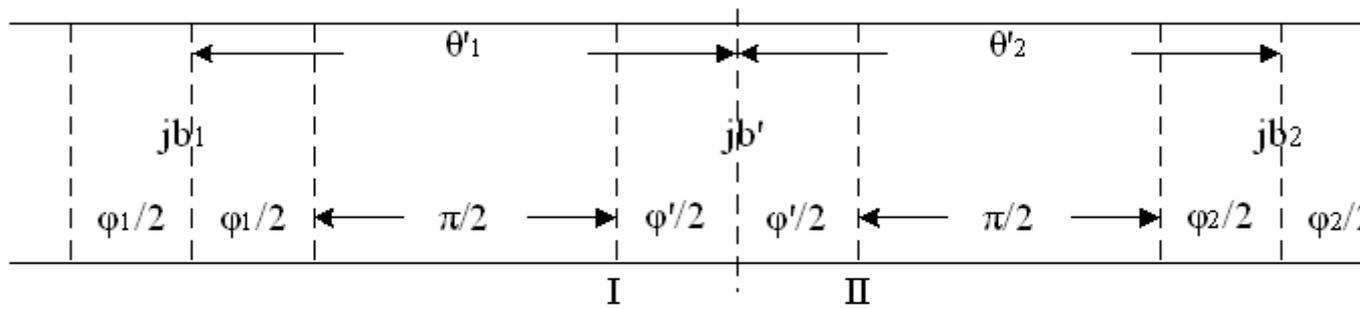
§ 2-6 直接耦合滤波器

将 $1/4$ 波长耦合滤波器各个空腔相邻的电纳和耦合段用一个大电纳代替，如图 46 所示中的 I-II 段，即变成直接耦合滤波器。

把变换部分取出，图 46 (a) 所示

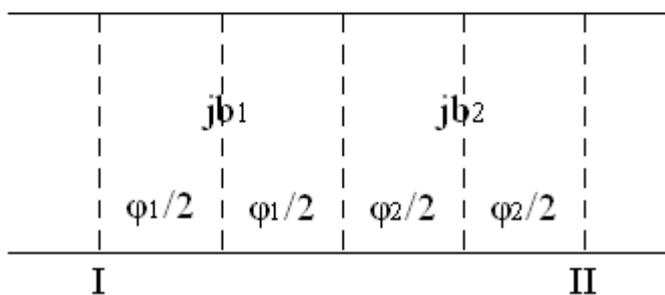


(a) $\lambda/4$ 耦合滤波器

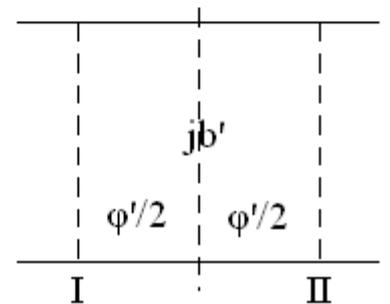


(b) 直接耦合滤波器

图 46



(a) $\lambda/4$ 耦合段



(b) 直接耦合段

图 47

1/4 波长耦合向直接耦合转换是要求在工作频率下，有相同的插入衰减和插入相移。下面的讨论将指出，所选择的大电纳 b' ，可以给出与 1/4 波长耦合滤波器相同的插入衰减，但不能同时满足相同的插入相移。相移的差别是靠增加直接耦合滤波器的长度来补偿的。这意味着这两种滤波器有稍微不同的特性。因此直接耦合滤波器的谐振是较长的。此外，由下面的讨论会知道，这种滤波器的有载 Q 值将比 1/4 波长耦合滤波器的有载 Q 值大些。

1. 电纳 b' 的确定

根据图 47 (a) 可知, 由电长度为 φ_1 的传输线和电纳 jb_1 组成的两端对网络, 其通用矩阵 $[a]$ 的表示式为:

$$\begin{bmatrix} \cos \frac{\varphi_1}{2} & j \sin \frac{\varphi_1}{2} \\ j \sin \frac{\varphi_1}{2} & \cos \frac{\varphi_1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ jb_1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & jB_1 \\ jC_1 & A_1 \end{bmatrix}$$

式中

$$A_1 = \cos \varphi_1 - \frac{1}{2} b_1 \sin \varphi_1$$

$$B_1 = \sin \varphi_1 + \frac{1}{2} b_1 (\cos \varphi_1 - 1)$$

$$C_1 = \sin \varphi_1 + \frac{1}{2} b_1 (\cos \varphi_1 + 1)$$

中心波长时的插入相移根据式 (13) 得:

$$\operatorname{tg}^{-1} \frac{B_1 + C_1}{2A_1} = \pi \quad (32)$$

这个结果也可以直接用 jb_1 和 φ_1 产生的相移相加而得到

$$\operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{b_1}{2} \right) + \operatorname{tg}^{-1} \left(-\frac{b_1}{2} \right) = \pi$$

整个 $1/4$ 波长耦合段的矩阵 $[a]$ 为

$$\begin{bmatrix} A_1 & jB_1 \\ jC_1 & A_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_2 & jB_2 \\ jC_2 & A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 A_2 - B_1 C_2 & j(A_1 B_2 + B_1 A_2) \\ j(A_1 C_2 - C_1 A_2) & A_1 A_2 - C_1 B_2 \end{bmatrix}$$

根据式 (14) 可找出插入衰减为

$$\begin{aligned}
L &= 1 + \frac{1}{4} (a_{12} - a_{21})^2 \\
&= 1 + \frac{1}{4} [(A_1 B_2 + B_1 A_2) - (A_1 C_2 + C_1 A_2)]^2 \\
&= 1 + \frac{1}{4} \left(\frac{b_1}{2} \sqrt{b_2^2 + 4} - \frac{b_2}{2} \sqrt{b_1^2 + 4} \right)^2
\end{aligned}
\tag{33}$$

但图 47 (b) 直接耦合段的插入相移用类似图 (a) 的推导方法可求出

$$\begin{aligned}
L &= 1 + \frac{1}{4} \left\{ \left[\sin \varphi' + \frac{1}{2} b' (\cos \varphi' - 1) \right] - \left[\sin \varphi' + \frac{1}{2} b' (\cos \varphi' + 1) \right] \right\}^2 \\
&= 1 + \frac{1}{4} (b')^2
\end{aligned}
\tag{34}$$

为了使 1/4 波长耦合段与直接耦合段的插入衰减相同, 令式(33)和式(34)相等, 则得

$$b' = \frac{b_1}{2} \sqrt{b_2^2 + 4} + \frac{b_2}{2} \sqrt{b_1^2 + 4}
\tag{35}$$

可见, b' 比 b_1, b_2 的数值大, 是个大电纳。

2. 插入相移的补偿

根据图 46(a)和式(32)可知, 1/4 波长耦合段的总的插入相移等于 2π 。而变换成图 47 (b) 的直接耦合段后, 仅电纳 $j b'$ 的相移为 $\text{tg}^{-1}(b'/2)$, 故要得到 2π 的插入相移, 必须用电长度 θ' 的附加传输线补偿。即

$$2\pi = \text{tg}^{-1} \frac{b'}{2} + \varphi'$$

所以

$$\varphi' = 2\pi - \operatorname{tg}^{-1} \frac{b'}{2} \quad (36)$$

2 的相移对电磁波的传输是不起作用的。为了缩减直接耦合滤波器的谐振腔长度，我们舍去 2π ，这样并不影响滤波器的滤波特性，故

$$\begin{aligned} \varphi' &= -\operatorname{tg}^{-1} \frac{b'}{2} \\ \varphi &= \operatorname{tg}^{-1} \left(-\frac{b'}{2} \right) \end{aligned}$$

3. 谐振腔的长度

根据图 47 (b) 直接耦合滤波器的谐振腔的电长度为：

$$\begin{aligned} \theta_1' &= \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi') \\ &= \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \left[\operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{b'}{2} \right) + \operatorname{tg}^{-1} \left(-\frac{b'}{2} \right) \right] \end{aligned}$$

所以

$$\theta_1' = \frac{1}{2} \left[\operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{2}{b_1} \right) + \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{2}{b'} \right) \right]$$

同理

$$\theta_2' = \frac{1}{2} \left[\operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{2}{b_2} \right) + \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{2}{b'} \right) \right]$$

它们的机械长度分别为

$$l_1' = \frac{\lambda g_0}{4\pi} \left[\operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{2}{b_1} \right) + \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{2}{b'} \right) \right]$$

$$l_2' = \frac{\lambda g_0}{4\pi} \left[\operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{2}{b_2} \right) + \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{2}{b'} \right) \right]$$

最后指出，直接耦合滤波器谐振腔的有载 Q 值，可以应用前面提到的类似方法找出，若 $j b'$ 是谐振腔的两边界电纳值，则其有载 Q 值为

$$Q'_L = \frac{1}{4} \sqrt{b'^4 + 4b'^2} \operatorname{tg}^{-1} \frac{2}{b'} \quad (37)$$

若只有两个谐振腔，两边电纳值为 $j b$ ，而中间的电纳值为 $j b'$ ，则双腔的有载 Q 值，通过繁杂推导可得：

$$Q'_L = \frac{1}{4} \sqrt{b^4 + 4b^2} \cdot \frac{1}{2} \left[\operatorname{tg}^{-1} \frac{2}{b} + \operatorname{tg}^{-1} \frac{2}{b'} \right] \quad (38)$$