实验23　　用Z变换法求差分方程的解

Mathcad 的Symbolic / Transform 菜单中, 提供了三种变换: Fourier变换, Laplace变换和Z变换, 以及相应的逆变换.

Z变换相当于数学中定义的母函数, 例如:

$$n^2 \text{ ztrans}, n \rightarrow z \cdot \frac{(z+1)}{(z-1)^3} \quad \text{而} \quad \sum_{n=0}^{\infty} n^2 \cdot z^{-n} \text{ simplify} \rightarrow z \cdot \frac{(z+1)}{(z-1)^3}$$

又如 $$e^k \text{ ztrans}, k \rightarrow \frac{z}{(z-\exp(1))} \quad \text{而} \quad \sum_{k=0}^{\infty} e^k \cdot z^{-k} \text{ simplify} \rightarrow \frac{z}{(z-\exp(1))}$$

利用Z变换及其逆变换, 可以求解差分方程的初值问题.

步骤如下:

(1) 给出差分关系式以及初始条件;

(2) 用鼠标包括自变量n,执行Symbolic / Transform/Z 菜单命令, 产生Z变换结果;

(3) 用y替换变换结果表达式中的 $\text{ztrans}(a(n), n, z)$, 用初始条件替换其中的 $a(0)$;

(4) 从经过替换的表达式中, 执行Symbolic / Variable/Solve命令, 解出y, 即用z的函数表出y;

(5) 对最后的不等式执行Symbolic / Transform/Inverse Z 命令, 即可得到所求得解.

例1 已知数列 $a_{n+1} = 2 \cdot a_n + 2^n$, $a_0 = 0$. 求 a_n 的通项公式.

求解过程如下 :

$$a(n+1) - 2 \cdot a(n) - 2^n \qquad a(0) = 0$$

第(1),(2)步

$$\frac{-\left(4 \cdot z \cdot \text{ztrans}(a(n), n, z) - z^2 \cdot \text{ztrans}(a(n), n, z) - 2 \cdot a(0) \cdot z + a(0) \cdot z^2 - 4 \cdot \text{ztrans}(a(n), n, z) + z\right)}{(-2+z)}$$

$$\frac{-\left(4 \cdot z \cdot y - z^2 \cdot y - 4 \cdot y + z\right)}{z-2} \text{ solve}, y \rightarrow \frac{z}{(z-2)^2}$$

替换上式解出y

$$\frac{z}{(-2+z)^2} \left| \begin{array}{l} \text{invztrans}, z \\ \text{simplify} \end{array} \right. \rightarrow 2^{(-1+n)} \cdot n$$

执行逆Z变换

$a(n) := 2^{(n-1)} \cdot n \qquad m := 1, 3 .. 12$　　　即 $a(n) = 2^{(n-1)} \cdot n$ 为所求的解

$a(m+1) - 2 \cdot a(m) =$ 　　$a(m+1) - 2 \cdot a(m) = 2^m =$

$a(m+1) - 2 \cdot a(m)$	$\frac{a(m+1) - 2 \cdot a(m)}{2^m}$
2	1
8	1
32	1
128	1
512	1
2048	1

例1 求菲波那契数列的通项.

$a(n+2) - a(n+1) - a(n)$ $\qquad a(0) = 0 \qquad a(1) = 1$

msgMapleZ $\qquad\qquad$ msgMapleZ ← Mathcad**命令**

$z^2 \cdot \mathrm{ztrans}(a(n), n, z) - a(0) \cdot z^2 - a(1) \cdot z - z \cdot \mathrm{ztrans}(a(n), n, z) + a(0) \cdot z - \mathrm{ztrans}(a(n), n, z)$

$z^2 \cdot y - 0 \cdot z^2 - 1 \cdot z - z \cdot y + 0 \cdot z - y$

msgMapleSolve

$$\frac{z}{\left(z^2 - z - 1\right)} \text{ invztrans}, z \;\rightarrow\; \frac{1}{5} \cdot \frac{\left[-(-2)^n \cdot \left(\sqrt{5} - 1\right)^n \cdot \sqrt{5} + 2^n \cdot \left(\sqrt{5} + 1\right)^n \cdot \sqrt{5}\right]}{\left(\sqrt{5} - 1\right)^n \cdot \left(\sqrt{5} + 1\right)^n}$$

$$\frac{1}{5} \cdot \frac{\left[2^n \cdot \left(\sqrt{5} + 1\right)^n \cdot \sqrt{5} - (-2)^n \cdot \left(\sqrt{5} - 1\right)^n \cdot \sqrt{5}\right]}{\left(\sqrt{5} - 1\right)^n \cdot \left(\sqrt{5} + 1\right)^n} \text{ simplify} \;\rightarrow\; \frac{1}{5} \cdot \sqrt{5} \cdot 2^n \cdot \left[-\left(\sqrt{5} + 1\right)^{-n} \cdot (-1)^n + \left(\sqrt{5} - 1\right)^{-n}\right.$$

$$a(n) := \frac{1}{5} \cdot \sqrt{5} \cdot 2^n \cdot \left[\left(\sqrt{5} - 1\right)^{-n} - \left(\sqrt{5} + 1\right)^{-n} \cdot (-1)^n\right]$$

$n := 1 .. 10$

$a(n) =$

1
1
2
3
5
8
13
21
34
55

例3 已知数列满足: $F(n+2) - 5 \cdot F(n+1) + 6 \cdot F(n) = 0 \quad F(0) = 1 \quad F(1) = -2$ **求** $F(n)$

$F(n+2) - 5 \cdot F(n+1) + 6 \cdot F(n)$ $\qquad F(0) = 1 \qquad F(1) = -2$

msgMapleZ

$z^2 \cdot \mathrm{ztrans}(F(n), n, z) - F(0) \cdot z^2 - F(1) \cdot z - 5 \cdot z \cdot \mathrm{ztrans}(F(n), n, z) + 5 \cdot F(0) \cdot z + 6 \cdot \mathrm{ztrans}(F(n), n, z)$

$z^2 \cdot \mathrm{ztrans}(F(n), n, z) - F(0) \cdot z^2 - F(1) \cdot z \ldots$
$+ [(-5) \cdot z \cdot \mathrm{ztrans}(F(n), n, z) + 5 \cdot F(0) \cdot z + 6 \cdot \mathrm{ztrans}(F(n), n, z)]$

$$z^2 \cdot y - z^2 + 2 \cdot z - 5 \cdot z \cdot y + 5 \cdot z + 6 \cdot y$$

$$z \cdot \frac{(z-7)}{\left(z^2 - 5 \cdot z + 6\right)} \text{ invztrans}, z \rightarrow -4 \cdot 3^n + 5 \cdot 2^n$$

其他例子:

$F(n+3) - 3 \cdot F(n+1) + 2 \cdot F(n)$ $\quad F(0) = 1 \quad F(1) = 0 \quad F(2) = 0$

$F(n+1) - F(n) - 2^n$ $\quad F(0) = 0$

$F(n+3) - F(n+2) - 9\, F(n+1) + 9 \cdot F(n)$ $\quad F(0) = 0 \quad F(1) = 1 \quad F(2) = 2$