试验24　　常微分方程的求解函数

本文档里, 我们来求解一个简单的微分方程, 首先使用我们已知的方法, 然后使用Mathcad的内部求解微分方程的函数求解.
问题如下: 求解下列常系数线性齐次微分方程.

$$-\frac{1}{2}\cdot y''' + \frac{1}{4}\cdot y'' - y' + y = 0$$

$y(0) = 2$ 　　 $y'(0) = -2$ 　　 $y''(0) = 0$ 　　**初始条件**

首先我们使用教科书中介绍的特征函数法求这个微分方程的特解:

$$f(z) := -\frac{1}{2}\cdot z^3 + \frac{1}{4}\cdot z^2 - z + 1$$ **定义特征函数f(z)**

$$v := \begin{pmatrix} 1 & -1 & \frac{1}{4} & \frac{-1}{2} \end{pmatrix}^T$$ **f(z) 的系数向量**

调用Mathcad的polyroots函数求特征方程的根:

$$z := \mathrm{polyroots}(v) \qquad z = \begin{pmatrix} -0.18204 - 1.51045i \\ -0.18204 + 1.51045i \\ 0.86408 \end{pmatrix}$$

方程的通解形式为:

$$y(t, C) := \sum_{i=0}^{2} C_i \cdot e^{z_i \cdot t}$$

其中 C_i **为待定的系数: 将初始条件代入, 得到关于Ci的三个方程:**

$$\sum_{i=0}^{2} C_i = 2$$

$$\frac{d}{dt}y(t, C) = \sum_{i=0}^{2} C_i \cdot z_i \cdot e^{z_i \cdot t} \qquad \sum_{i=0}^{2} C_i \cdot z_i = -12$$

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t, C) = \sum_{i=0}^{2} C_i \cdot \left(z_i\right)^2 \cdot e^{z_i \cdot t} \qquad \sum_{i=0}^{2} C_i \cdot \left(z_i\right)^2 = 0$$

三个方程联立为关于 Ci (i=0..2) 的线性方程组，其系数行列式为如下的Vandermonde 行列式

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ z_0 & z_1 & z_2 \\ \left(z_0\right)^2 & \left(z_1\right)^2 & \left(z_2\right)^2 \end{bmatrix}$$ **系数矩阵**

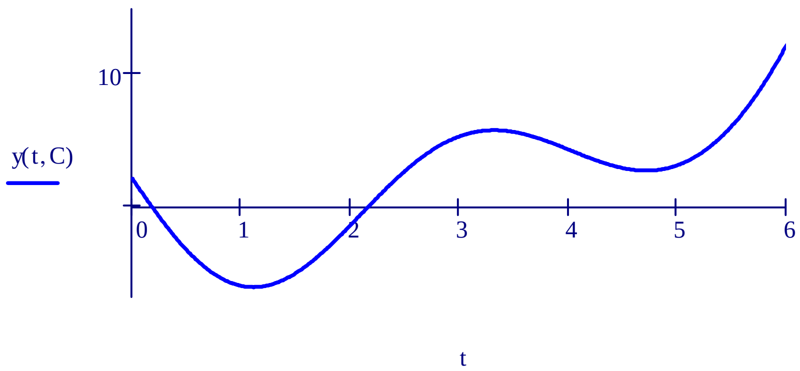
$y0 := (2\ \ -12\ \ 0)^T$ 初始值

解方程组: **A*C=y0**

$C := \mathrm{lsolve}(A, y0)$ $C = \begin{pmatrix} 0.96146 - 3.8785i \\ 0.96146 + 3.8785i \\ 0.07708 \end{pmatrix}$

下面生成解曲线的图形

$\varepsilon := 0.01$ $t0 := 0$ $te := 6$ $t := t0, t0 + \varepsilon .. te$



y(t, C) =

2
1.88
1.76
1.64
1.52
1.401
1.281
1.162
1.042
0.923

下面使用**Mathcad**的内部函数**rkfixed** 来求解:

$y := y0$ $y = \begin{pmatrix} 2 \\ -12 \\ 0 \end{pmatrix}$ 定义初始条件

定义与未知解函数有关的向量**D(t,y)**:

$$D(t, y) := \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ -2\cdot\left(-\frac{1}{4}\cdot y_2 + y_1 - y_0\right) \end{bmatrix}$$

一阶导数

二阶导数

三阶导数

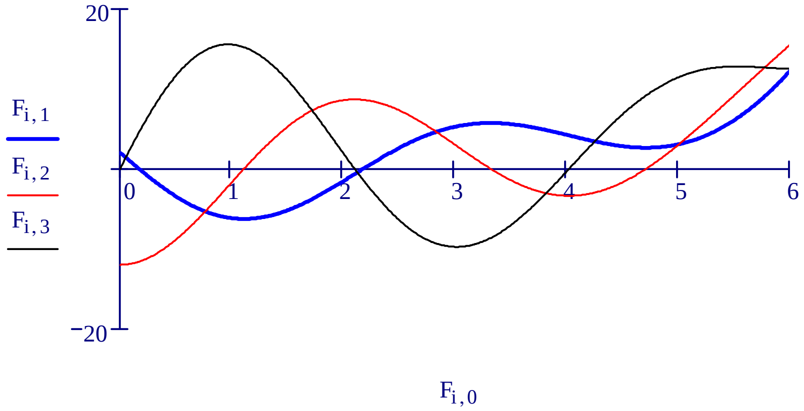
$n := \dfrac{te - t0}{\varepsilon}$ $i := 0 .. n$ 需计算的点数

$F := \mathrm{rkfixed}(y, t0, te, n, D)$ 解矩阵

$F_{i,1} =$

	0
0	2
1	1.88
2	1.76
3	1.64
4	1.52
5	1.401
6	1.281
7	1.162
8	1.042
9	0.923
10	0.805
11	0.686

F的第一列为自变量的值, 第二列为对应于自变量值的解函数数值, 第三列和第四列分别为解函数的一阶导数和二阶导数值.



比较 $y(t,C)$ 与 $F_{i,1}$ 可以看到二者是一致的.

注: 上面求解中也可以使用内部函数 Bulstoer 和 Rkadapt 所得的解是一样的.

下面使用 Odesolve 函数求解:

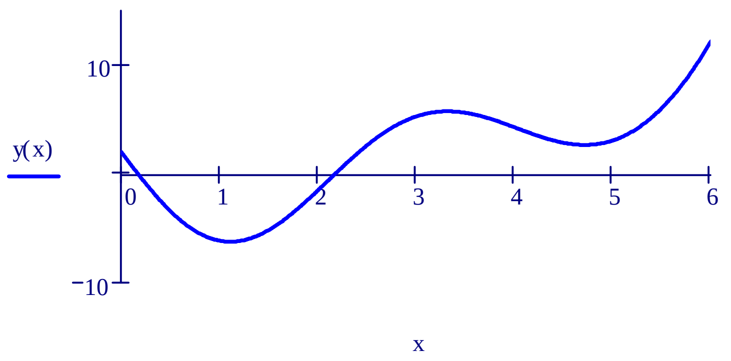
Given

$$-\frac{1}{2}\cdot\frac{d^3}{dx^3}y(x)+\frac{1}{4}\cdot\frac{d^2}{dx^2}y(x)-\frac{d}{dx}y(x)+y(x)=0$$

$$y(0)=2 \qquad y'(0)=-12 \qquad y''(0)=0$$

$y := \text{Odesolve}(x,6,100)$

$x := 0, 0.01 .. 6$



$y(x) =$

2
1.88
1.76
1.64
1.52
1.401
1.281
1.162