



## 程序的递归调用实例：

## (1) 计算和：

$$\text{age}(n) := \begin{cases} 30 & \text{if } n = 1 \\ \text{age}(n-1) + 2 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\text{age}(8) = 44$$

$$\text{sum}(n) := \begin{cases} \text{sum}(n-1) + n & \text{if } n > 1 \\ 1 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\text{sum}(100) = 5050$$

## (2) 计算阶乘：

$$\text{fac}(n) := \begin{cases} 1 & \text{if } n = 0 \\ n \cdot \text{fac}(n-1) & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\text{fac}(6) = 720$$

## (3) 计算组合数：

$$C(n, k) := \begin{cases} \frac{n}{k} \cdot C(n-1, k-1) & \text{if } k \neq 0 \\ 1 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$C(6, 2) = 15 \quad C(15, 7) = 6435$$

## (4) 计算菲波那契数列的项：

$$\text{fib}(n) := \begin{cases} \text{fib}(n-1) + \text{fib}(n-2) & \text{if } n > 1 \\ 1 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\text{fib}(8) = 34 \quad \text{fib}(15) = 987$$

## (5) 计算两个整数的最大公约数：

$$\text{Hcd}(m, n) := \begin{cases} a \leftarrow \min(m, n) \\ b \leftarrow \max(m, n) \\ a & \text{if } \text{mod}(b, a) = 0 \\ \text{Hcd}(a, b-a) & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\text{Hcd}(105, 855) = 15 \qquad \text{Hcd}(108, 804) = 12$$

(6) 用有关公式计算 $\pi$ 的近似值：

**A** 用Wallis公式计算 $\pi$ 的近似值:

$$P(n) := 2 \prod_{k=1}^n \left( 1 + \frac{1}{4 \cdot k^2 - 1} \right) \qquad P(900) = 3.14072059461076$$

$$\text{Pivalue}(n) := \begin{cases} 2 & \text{if } n = 0 \\ \left( 1 + \frac{1}{4 \cdot n^2 - 1} \right) \cdot \text{Pivalue}(n-1) & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\text{Pivalue}(900) = 3.14072059461076$$

**B**：用Machin公式计算 $\pi$ 的近似值：

$$4 \cdot \sum_{k=1}^{1000} (-1)^{k-1} \cdot \frac{1}{2k-1} = 3.14059265383979$$

$$\text{pi}(n) := \begin{cases} \text{pi}(n-1) + (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{2 \cdot n - 1} & \text{if } n > 1 \\ 1 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$4 \cdot \text{pi}(1000) = 3.14059265383979$$

**C**：编一个程序用如下公式计算 $\pi$ 的近似值：

$$\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3 \cdot 3^3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{1}{5 \cdot 2^5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{1}{7 \cdot 2^7} + \dots$$

$$d(n) := \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{if } n = 1 \\ \frac{2n-1}{2n} \cdot d(n-1) & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\text{pi\_value}(k) := \begin{cases} a \leftarrow \frac{1}{2} \\ \text{for } i \in 1..k \\ \quad a \leftarrow a + \frac{1}{(2 \cdot i + 1) \cdot 2^{(2 \cdot i + 1)}} \cdot d(i) \\ 6 \cdot a \end{cases}$$

$$\text{pi\_value}(17) = 3.14159265358959$$

$$6 \cdot \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{24} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{1}{5 \cdot 32} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{1}{7 \cdot 2^7} \right) = 3.14115513392857$$