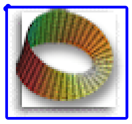


实验32　用待定系数法求插值多项式

求通过指定的几个点的多项式方程

以下仅对三次和四次多项式的情况进行讨论.
我们知道, 对给定的点D=(x1,y1), E=(x2,y2) 和 F=(x3,y3), 求出拟合它们的函数
$p(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ 的系数是非常麻烦的。求解这个问题需要解下列的线性方程组:

$$a \cdot x1 + b \cdot x1 + c \cdot x1 = y1$$

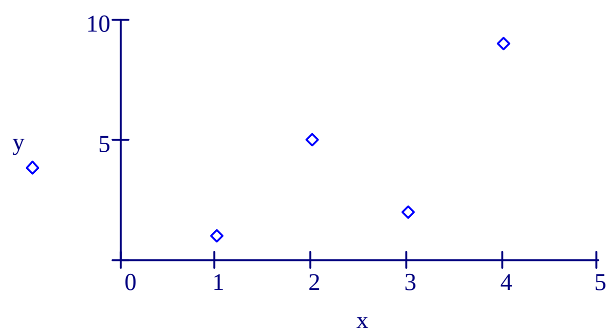
$$a \cdot x2 + b \cdot x2 + c \cdot x2 = y2$$

$$a \cdot x3 + b \cdot x3 + c \cdot x3 = y3$$

此问题徒手来做也是很容易, 但是如果我们给定四个点或者给定六个点来拟合三次或五次多项式便没有那么容易了. 我们使用Mathcad的求解模块来解决这个问题.

定义数据点向量, x代表点的横坐标, y代表点的纵坐标:

$$x := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad y := \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \\ 9 \end{pmatrix} \qquad i := 0..3$$



这个点集看上去可以用三次多项式拟合, 我们用函数 $c(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$ 建立方程组和求解模块. 为求解模块定义初始值:

$$a := 1 \qquad b := 1 \qquad c := 1 \qquad d := 1$$

Given

$$a \cdot (x_0)^3 + b \cdot (x_0)^2 + c \cdot x_0 + d = y_0$$

$$a \cdot (x_1)^3 + b \cdot (x_1)^2 + c \cdot x_1 + d = y_1$$

$$a \cdot (x_2)^3 + b \cdot (x_2)^2 + c \cdot x_2 + d = y_2$$

$$a \cdot (x_3)^3 + b \cdot (x_3)^2 + c \cdot x_3 + d = y_3$$

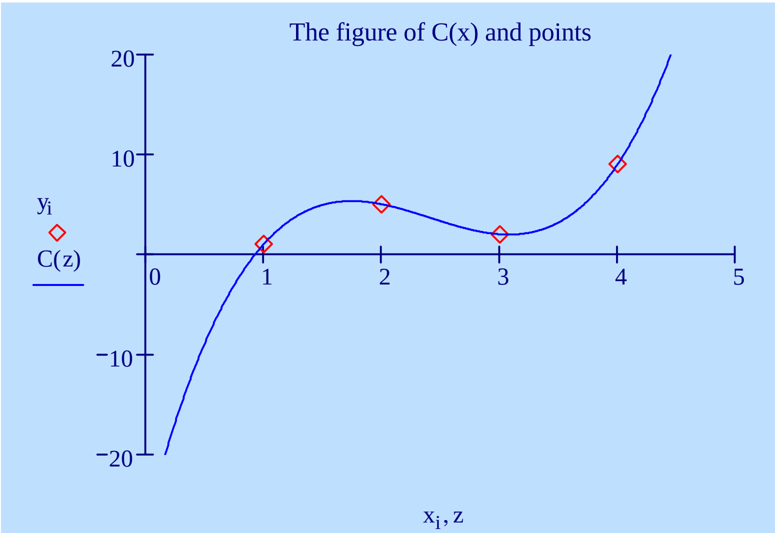
$P := \mathrm{Find}(a, b, c, d)$

$$P = \begin{pmatrix} 2.833 \\ -20.5 \\ 45.667 \\ -27 \end{pmatrix}$$

P就是拟合的三次多项式的系数组成的矩阵.

令:

$C(x) := P_0 \cdot x^3 + P_1 \cdot x^2 + P_2 \cdot x + P_3$ **做出拟合曲线的图形.**



作为进一步的练习, 我们再来拟合一个四次多项式 :数据点向量为:

$$x := \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} \qquad y := \begin{pmatrix} 6 \\ 12 \\ 2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad j := 0..4$$

给定初始值 $A := 0 \quad B := 0 \quad C := 0 \quad D := 0 \quad E := 0$

Given

$$A \cdot (x_0)^4 + B \cdot (x_0)^3 + C \cdot (x_0)^2 + D \cdot x_0 + E = y_0$$

$$A \cdot (x_1)^4 + B \cdot (x_1)^3 + C \cdot (x_1)^2 + D \cdot x_1 + E = y_1$$

$$A \cdot (x_2)^4 + B \cdot (x_2)^3 + C \cdot (x_2)^2 + D \cdot x_2 + E = y_2$$

$$A \cdot (x_3)^4 + B \cdot (x_3)^3 + C \cdot (x_3)^2 + D \cdot x_3 + E = y_3$$

$$A \cdot (x_4)^4 + B \cdot (x_4)^3 + C \cdot (x_4)^2 + D \cdot x_4 + E = y_4$$

$m := \mathrm{Find}(A, B, C, D, E)$

$$m = \begin{pmatrix} -0.375 \\ 5.383 \\ -24.125 \\ 32.717 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$p(x) := m_0 \cdot x^4 + m_1 \cdot x^3 + m_2 \cdot x^2 + m_3 \cdot x + m_4$$