

誌 謝

經過兩年的努力，本篇論文終於問世，首先，最感謝的是我的指導教授鍾俊業博士，由於他殷勤並不厭其煩的指導，才使我能繼續完成論文，第二要感謝所長及所內各位教師的指導並指正，使我能完成學業，也感謝本所助教們的協助，使我能專心研究無後顧之憂，也感謝本所提供之設備，使我能很便利的得到理想的實驗結果，另外，還要感謝本校電機工程學系的黃思倫博士，因著他的指教，使論文更嚴謹，也感謝電機工程學系提供實驗之器材，也感謝與我一同奮鬥兩年的同學們，最後，感謝母校逢甲大學對我提供之所有的幫助及栽培，謝謝。

中文摘要

變壓器及電抗器的飽和特性對於電力系統的暫態現象影響很大，很多電機機械及保護設備常因為磁飽和現象而影響系統動作特性。因此建立變壓器飽和特性之數學模式，為電力系統暫態現象研究中非常重要的工作。

本文先用 LR 濾波器探討電感是否會改變，當電流升高後，電感會產生飽和現象，電感值會逐漸降低，經由波德圖試驗及計算機模擬可得證，接著採用描述函數法，來模擬飽和後之電感，並與線性電感及非線性電感所模擬之結果比較，發現描述函數比其他二種方法接近實際情況。

接著採用描述函數來模擬當鐵心飽和時之激磁電抗，並重新推導電壓調整率，以其探討其對電壓調整率之影響，最後，再以實驗及計算機模擬來驗證之。

Abstract

The saturation characters of transformer and inductor affect a lot of the transient effects for power systems.

The system's performance of many electric machines and protected equipments is affected by magnetic saturation. Then, it is important to establish the mathematical model of the saturation character of the transformer for transient effect research of power system.

First, this paper use the LR low pass filter to confer if the inductance will be changed. This is due to the fact that when the current is large, the inductance always suffer from saturation. It can be proved by the Bode-plot and computer simulation. Secondary, we use the describing function to simulate the saturation of inductor and then compare the results of the linear inductors and nonlinear inductors.

Thirdly, we use describing function to simulate surge inductance current when iron core is saturate, and get voltage regulation again to study the effects of voltage regulation. Finally, we prove the fact with experiment and computer simulation.

目錄

中文摘要	ii
Abstract	iii
目錄	iv
圖目錄	vi
符號意義	viii
第一章 緒論	1
1.1 前言	1
1.2 文獻探討	2
1.3 研究動機	2
第二章 描述函數法簡介	3
2.1 描述函數法的基本概念	3
2.2 描述函數的分類	6
2.2.1 反衝(backlash)非線性	6
2.2.2 反衝飽和(backlash-saturated)非線性	8
2.2.3 飽和(saturated)非線性	10
第三章 電感及被動濾波器	12
3.1 電感器	12
3.2 濾波器描述函數	15
3.3 LR 低通濾波器 (LR low-pass filter)	17
3.4 模擬與實驗結果	18
第四章 變壓器	24
4.1 理想變壓器	24
4.2 實際變壓器	26
4.3 變壓器開路實驗	29
4.4 變壓器短路實驗	30
4.5 電壓調整率	32
4.6 加入激磁電抗之影響	34
4.7 模擬與實驗結果	36

<u>第五章 結論</u>	40
<u>參考文獻</u>	41
<u>附錄</u>	43
<u>A. 加入激磁電抗之電壓調整率公式推導</u>	43
<u>B.解非線性代數方程之 MATLAB 程式</u>	46

圖目錄

Fig.2.1 非線性元件輸入、輸出方塊圖.....	4
Fig. 2.2 反衝非線性及其輸入、輸出波形.....	7
Fig. 2.3 反衝飽和非線性及其輸入、輸出波形.....	9
Fig. 2.4 飽和非線性之輸入與輸出特性圖.....	11
Fig. 3.1 電感器示意圖.....	12
Fig. 3.2 螺線形電感示意圖.....	13
Fig. 3.3 小電流磁滯之描述函數.....	15
Fig. 3.4 大電流磁滯之描述函數.....	16
Fig. 3.5 LR 低通濾波器示意圖	17
Fig. 3.6 磁滯曲線量測示意圖.....	18
Fig. 3.7 環形線圈電感磁化曲線與磁滯曲線圖.....	19
Fig. 3.8 電感飽和時之自感與電流大小關係圖.....	19
Fig. 3.9 LR 實驗電路流程圖	20
Fig. 3.10 輸入電壓 20 伏特時之 LR 一階低通濾波器波德大小圖	20
Fig. 3.11 輸入電壓 5.2 伏特時之 LR 一階低通濾波器波德大小圖.....	21
Fig. 3.12 輸入電壓 20 伏特時之 LR 一階低通濾波器波德大小圖	22
Fig. 3.13 輸入電壓 3 伏特時之 LR 一階低通濾波器波德大小圖	23
Fig. 4.1 雙繞組的理想變壓器.....	24
Fig. 4.2 理想變壓器的相量圖.....	25
Fig. 4.4 將繞組電阻于以分離之變壓器.....	26
Fig. 4.5 將繞組電阻即漏電抗于以分離之變壓器	27
Fig. 4.6 實際變壓器模式.....	27
Fig. 4.7 參考至一次側的變壓器精確等效電路.....	28
Fig. 4.8 參考至二次側的變壓器精確等效電路.....	28
Fig. 4.9 參考至一次側的近似等效電路.....	28
Fig. 4.10 開路實驗之等效電路.....	29
Fig. 4.11 激磁電抗不能忽略時之等效電路.....	30
Fig. 4.12 變壓器之外觀.....	31

Fig. 4.13 利用 RLC meter 測量交流電阻及交流電抗.....	31
Fig. 4.14 以二次側為參考側的等效電路與相量圖	33
Fig. 4.15 為變壓器之等效電路圖.....	34
Fig. 4.16 電壓調整率於電流變動下之模擬.....	36
Fig. 4.17 電壓調整率在飽和電流變動下之模擬	36
Fig. 4.18 電壓調整率之實驗電路圖.....	37
Fig. 4.19 變壓器電壓調整率之實驗結果.....	38
Fig. 4.20 理論模擬與實驗值之比較.....	38
Fig. 4.21 傳統理論與描述函數模擬及實驗值之比較	39
Fig. A.1 變壓器等效電路圖.....	43
Fig. B.1 程式流程圖	46

符號表

$N(A)$: 輸入信號為 $I_2(t) = A \sin \omega t$ 時之描述函數

A : 輸入信號 $I_2(t)$ 之最大振幅

l : 電感之磁交鏈

f : 電感之磁通量

N : 電感之匝數

L : 電感之電感量

m : 導磁係數

x_1 : 變壓器一次側漏電抗

x_2 : 變壓器二次側漏電抗

$x_M(A)$: 激磁電抗

第一章 緒論

1.1 前言

電對於現代人來說是不可或缺的一種能源，日常生活中若沒有電，那就有很多事情無法順利進行，電的發現與利用為人類帶來了許多的便利，也為科技的發展與文明的進步提供了一個絕佳的契機，然而電要順利的傳送到生活周遭是需要經過許多的過程，例如：發電、輸電、配電，經過這些的過程我們才能方便的使用電為我們帶來的好處，所以在電力系統中，傳送電的過程就很重要，在 1882 年愛迪生的中央電力站於紐約市開始運轉，帶其發電及傳輸電壓太低，當供應大量功率時需大量電流，使得有大量的功率消耗在傳輸線上，以致於當電送到用戶時已經剩下少部分的電量，因此，供電範圍受到了很大的限制，1880 年代中央電力站的供電範圍僅是幾條街的範圍，因此，直流電力系統無法以低電壓供應電能至較遠的距離，基於這個事實，發電站必須是區域式小型電廠，因此顯得沒有效率。

變壓器的發明及交流電源的發展消除了電力系統及電能準位上的限制，變壓器把一電壓準位轉換到另一電壓準位而不影響能量的供應，若變壓器將電路的電壓升高，其電流必須減少，以使變壓器輸入功率等於輸出功率。因此，交流電能可以由發電廠產生後將其電壓升高，經由傳輸線傳送到用戶端之損失很小，可供應較遠的距離，只需在用戶端在接一個變壓器將電壓降下來，即可供給用戶使用。傳輸線上之能量損耗和電流的平方成反比，所以把傳輸電壓升高十倍，則傳輸之能量損耗將減少為原來的百分之一。因此，大大的提升了電能運用的效率，變壓器在今日的電力系統中已經是不可或缺的元件之一。

在今日處處都要用電的時代，不僅要增設新電廠，更重要的就是如何能有效運用現有的資源，因此，效率即為一重要的指標，而整個輸電系統中除了傳輸過程會有少許能量的消耗，在變壓器上的消耗也是探討的範圍，可由變壓器的特性來探討，其中影響最大的是電壓調整率及效率，由於變壓器之電壓調整率若不佳，往往可能造成電力系統之效率不佳，且會影響整個系統得動作特性，甚至可能造成電力系統之元件如變頻電路等等壽命減短，在設計電力系統之各項參數或電路時，必須要考率到變壓器的電壓調整率，然而，經研究人員發現

電壓調整率之設計往往不是非常準確，其原因乃是電力系統中的儲能元件皆有所謂飽和的問題存在，而此一現象造成許多電路的特性被改變了，因此，建立一套正確的數學模型及設計方法是非常重要的課題。

1.2 文獻探討

過去探討變壓器的文獻多為研究變壓器飽和現象[4][5][6][12][13][14][18]及磁滯迴路的問題[1][19]，經過多年的研究，相關之問題已有許多的數學模式及解決方法，的確，也有一些方法確實有效解決了上述之問題，例如，解決飽和現象的方法大約可分成兩大類型，一類以由物理觀點來解釋，並用雙曲線函數來模擬，另一類以數學方程式描述磁滯迴路現象，並用許多的數值來模擬，然而，變壓器的另一項重要的指標“電壓調整率”[11][16]卻是乏人問津，因為其較不至有何爭議。

1.3 研究動機

近日經由設計放電加工機之電源供應器時，發現電路經常燒毀，正當百思不得其解時，意外發現電感在高電流時不再是定值，甚至會消失不見，電感是一非線性之元件[15][20]，且經由實驗並模擬 RLC 及 RC 濾波器發現濾波頻率會隨著電流加大使濾波頻率較理論值延後，並題出描述函數(describing function)來模擬此一非線性電感，因此，在以往探討變壓器時均予以忽略之激磁電抗，在此一因素下，便不可再忽略，所以，整個等效電路必須重新推導，電壓調整率也必定會改變，故此，希望藉由本篇論文找出一正確的數學模式並藉由實驗及模擬驗證之。

第二章 描述函數法簡介

2.1 描述函數法的基本概念

在自然界中許多物裡的現象都是屬於非線性的關係，而在控制系統中亦是如此，然而傳統之控制理論多為線性的理論，在實際的系統中並不十分適用，非線性系統可大約區分為兩大類，第一大類為固有型非線性（inherent nonlinearity）而此類之非線性系統在實際的系統中最为常見，且其非線性特性也無法消除。例如：飽和（saturation）死區（dead zone）磁滯（hysteresis）反衝（backlash）靜摩擦（static friction）庫輪摩擦（coulomb friction）非線性彈簧（nonlinear spring）流體之壓縮力（compressibility of fluid）等等，這些非線性的現象對整個系統的效能，將會造成不良的影響，如振盪、系統不穩定、產生穩態誤差 等。第二大類則為有意型非線性特性（intentional nonlinearity），這個類型的非線性系統故意將某些非線性元件放進控制系統中，以達到增強系統性能或是簡化系統結構的目的，此類之非線性系統往往比擁有相同功能之線性系統要來的經濟、可靠。

然而，針對非線性系統，至今尚無一通用之方法可以處理，因為非線性微分方程式本身也尚無一般性通用之解法，唯有一些特殊的非線性系統，可以找出正確之解，其餘大部分的非線性微分方程式都只能求得近似解，並且還必需要在某些限制條件之下才能使用。然而，在非線性系統中，假若其非線性程度較低，最常使用的方法，就是忽略非線性系統中之非線性部分，進而以線性系統來進行分析及設計，這個簡化系統的過程可視為將非線性系統於以線性化，也就是以一個近似原先之非線性系統的線性系統來取代原先之非線性系統，然後再以線性系統理論進行分析與設計，其中，常見之方法有：“片段線性化（piece wise linearization）”，“小範圍擾動（disturbance）”，及“描述函數法（describing function method）”，而本文所使用之方法即為描述函數法，此種方法是針對非線性特性非常明顯的系統。

描述函數法是建立在頻率響應（frequency response）的基礎上，因此，在設計及分析時必需配合頻域分析及頻域設計，而設計與分析之最終目的為求得系統能夠穩定，並非僅僅以求得非線性微分方程式的正確解為其最終目的，但

是，由於今日數值運算蓬勃的發展，使得數值運算可利用來解微分方程式之正確解，並利用數值來進行模擬與分析。

一非線性元件之方塊圖如 Fig. 2.1 所示， N 為非線性元件，假設非線性元件之輸入信號 $x(t)$ 為正弦信號，假設輸出之響應為穩態，因此，可預測非線性元件之輸出信號 $y(t)$ 必定為一週期波，但卻不是正弦信號，因為輸出信號為週期波，所以可以利用傅立葉級數（Fourier Series）來表示，通常將輸入信號的頻率當作傅立葉級數的基本波頻率（fundamental frequency），而傅立葉級數中上含有較高頻的成分。

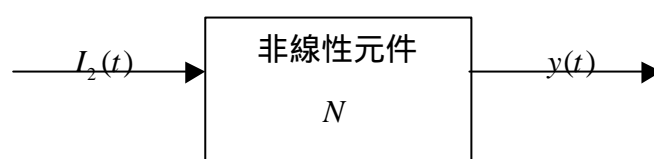


Fig.2.1 非線性元件輸入、輸出方塊圖

描述函數必需在下列的限制條件中才能使用：

1. 非線性元件的輸入信號必定為正弦信號。
2. 非線性元件的輸出信號中，較高頻的成分可以被忽略。

當考慮整個控制系統時，通常都含有迴授的部分，常有許多的線性元件被使用在迴授部分，其轉移函數的分母就會含有數個時間常數，可視為一低通濾波器（low-pass filter），當一個非線性元件和具有相位落後特性的線性元件串結實，非線性元件的週期性輸出信號中的高頻成分，會被低通濾波的特性衰減。因此，當信號迴授迴路在進入非線性元件時，即可將此信號是為一正弦輸入信號，根據奈氏穩定準則，將迴路的斷路定在非線性元件的輸入點，假設信號之高頻部分已經被濾掉，則經由迴授迴路再回到輸入點的信號必為正弦信號，而穩定度則根據正弦信號輸入系統之後的響應決定，因此，系統之高頻成分將不會影響系統的穩定度，而非線性元件的描述函數定義為元件輸出信號的基本波對元件輸入信號的複數比值，即

$$N(A) = \frac{Y_1}{A} \angle f_1 \quad (2.1.1)$$

式中

N ：描述函數

A : 輸入之正弦信號的振幅

Y_1 : 輸出信號之基本波的振幅

f_1 : 輸出信號之基本波的相位差

假設非線性元件中包含儲能元件 (energy-storage element) , 則 N 只是非線性元件輸入信號之振幅的函數 , 若包含儲能元件 , 則 N 為輸入信號之振幅及頻率的函數。

描述函數的計算 , 首先必需找出信號的基本波 , 假設非線性元件的正弦輸入信號為 $I(t) = A \sin \omega t$, 則 $y(t)$ 可以用傅立葉級數展開為

$$\begin{aligned} y(t) &= A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \sin n\omega t + B_n \cos n\omega t) \\ &= A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} Y_n \sin(n\omega t + f_n) \end{aligned} \quad (2.1.2)$$

其中

$$A_n = \frac{1}{p} \int_0^{2p} y(t) \sin n\omega t d(\omega t)$$

$$B_n = \frac{1}{p} \int_0^{2p} y(t) \cos n\omega t d(\omega t)$$

$$Y_n = \sqrt{A_n^2 + B_n^2}$$

假設非線性元件具有對稱的特性 , 則 $A_0 = 0$, 因此輸出信號的基本波可表示為

$$\begin{aligned} y_1(t) &= A_1 \sin \omega t + B_1 \cos \omega t \\ &= Y_1 \sin(\omega t + f_1) \end{aligned} \quad (2.1.3)$$

由此可得非線性元件的描述函數為

$$N(A) = \frac{Y_1}{A} \angle f_1 = \frac{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}}{A} \angle \tan^{-1} \left(\frac{A_1}{B_1} \right) \quad (2.1.4)$$

由式 2.1.4 可知 , 當 $f_1 \neq 0$ 時 , $N(A)$ 為一複數 , 非線性元件的描述函數與線性元件的頻率之轉移函數 , 都是以輸出和輸入信號的複數比來表示 , 因此描述函數在實質上保留了非線性元件的特徵 , 並且若非線性元件以其描述函數 $N(A)$ 來表示時 , 可沿用線性系統理論中的頻率響應法來研究分析非線性控制系統 , 描述函數有多種的模式 , 下節將就本文會使用到的三種描述函數加以逐一介紹。

2.2 描述函數的分類

2.2.1 反衝(backlash)非線性

反衝非線性描述函數可用於描述鋼鐵材料塑性變形之遲滯現象以及電感之磁滯效應不嚴重的情況，反衝非線性特性元件之正弦輸入與輸出波形如 Fig. 2.2 所示，其中輸入為 $I(t)$ ，輸出為 $y(t)$ 。

當正弦輸入號的振幅 $X < b$ 時，輸出信號 $y(t) = 0$ ；當正弦輸入信號的振幅 $X > b$ 時，非線性元件的輸出信號 $y(t)$ 為

$$y(t) = \begin{cases} k(A \sin \omega t - b) & 0 \leq \omega t < \frac{p}{2} \\ k(A - b) & \frac{p}{2} \leq \omega t < q \\ k(A \sin \omega t + b) & q \leq \omega t < p \end{cases} \quad (2.2.1)$$

其中

$$\begin{aligned} q &= p - \sin^{-1}\left(\frac{X - 2b}{A}\right) \\ &= p - \sin^{-1}\left(1 - \frac{2b}{A}\right) \end{aligned}$$

由於反衝非線性的特性是對原點多值奇對稱，因此輸入為正弦信號時的輸出信號 $y(t)$ 不是奇函數，也不是偶函數，所以 A_1 及 B_1 都必須計算，但 $A_0 = 0$ 。

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{1}{p} \int_0^{2p} y(t) \cos \omega t d(\omega t) = \frac{2}{p} \int_0^p y(t) \cos \omega t d(\omega t) \\ &= \frac{2}{p} \left[\int_0^{\frac{p}{2}} k(A \sin \omega t - b) \cos \omega t d(\omega t) + \int_{\frac{p}{2}}^q k(A - b) \cos \omega t d(\omega t) \right. \\ &\quad \left. + \int_q^p k(A \sin \omega t + b) \cos \omega t d(\omega t) \right] \\ &= \frac{4kb}{p} \left(\frac{b}{A} - 1 \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_1 &= \frac{1}{p} \int_0^{2p} y(t) \sin \omega t d(\omega t) = \frac{2}{p} \int_0^p y(t) \sin \omega t d(\omega t) \\ &= \frac{2}{p} \left[\int_0^{\frac{p}{2}} k(A \sin \omega t - b) \sin \omega t d(\omega t) + \int_{\frac{p}{2}}^q k(A - b) \sin \omega t d(\omega t) \right. \\ &\quad \left. + \int_q^p k(A \sin \omega t + b) \sin \omega t d(\omega t) \right] \\ &= \frac{kX}{p} \left[\frac{p}{2} + \sin^{-1}\left(1 - \frac{2b}{A}\right) + 2\left(1 - \frac{2b}{A}\right) \sqrt{\frac{b}{A} \left(1 - \frac{b}{A}\right)} \right] \end{aligned}$$

所以反衝非線性的描述函數可表示為

$$\begin{aligned}
 N(A) &= \frac{B_1 + jA_1}{A} \\
 &= \frac{k}{p} \left[\frac{p}{2} + \sin^{-1} \left(1 - \frac{2b}{A} \right) + 2 \left(1 - \frac{2b}{A} \right) \sqrt{\frac{b}{A} \left(1 - \frac{b}{A} \right)} \right] + j \frac{4kb}{pA} \left(\frac{b}{A} - 1 \right)
 \end{aligned}
 \tag{2.2.2}$$

$(A \geq b)$

反衝非線性的描述函數 $N(A)$ 是正弦輸入振幅 A 的多值函數，與正弦輸入信號的頻率 ω 無關。

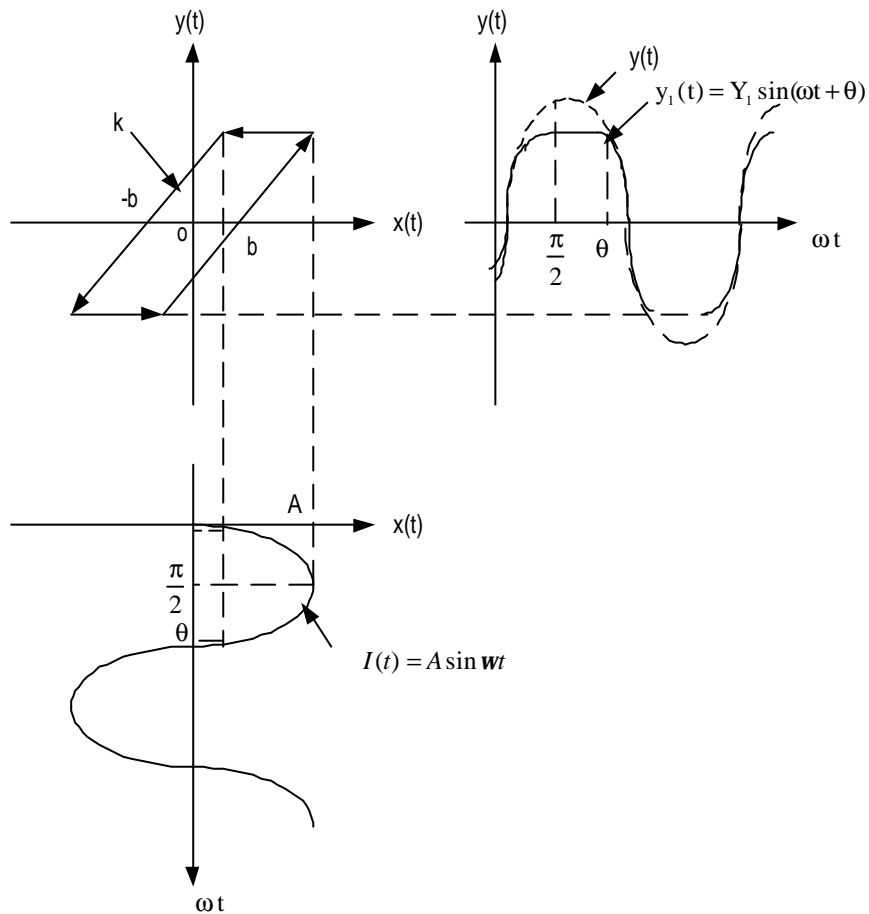


Fig. 2.2 反衝非線性及其輸入、輸出波形

由於 Fig. 2.2 之積分方向為逆時針方向，此方向與電感發生磁滯時之方向相同，因此電感在磁滯效應不嚴重時，可直接利用式(2.2.2)來描述磁滯現象。

2.2.2 反衝飽和(backlash-saturated)非線性

反衝飽和非線性元件可用來描述電感於磁滯效應較嚴重時之情況，反衝飽和非線性特性以及它對正弦輸入的輸出波形如 Fig. 2.3 所示，其中輸入信號為 $I(t)$ ，輸出信號為 $y(t)$ 。

當正弦輸入信號的振幅 $A < b$ 時，非線性的輸出 $y(t)=0$ ；當 $A > b$ 時，非線性的輸出 $y(t)$ 為

$$y(t) = \begin{cases} k(A \sin \omega t - b) & 0 \leq \omega t < q_1 \\ M & q_1 \leq \omega t < q_2 \\ k(A \sin \omega t + b) & q_2 \leq \omega t < p \end{cases} \quad (2.2.3)$$

其中

$$q_1 = \sin^{-1}\left(\frac{b + \frac{M}{k}}{A}\right)$$

$$q_2 = p - \sin^{-1}\left(\frac{\frac{M}{k} - b}{A}\right)$$

由於反衝飽和非線性特性是對原點多值奇對稱，因此，當輸入為正弦信號時輸出信號 $y(t)$ 不是奇函數，也不是偶函數，所以 A_1 及 B_1 都必須計算，但 $A_0 = 0$ 。

$A \geq \frac{M + kb}{k}$ 時，

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{1}{p} \int_0^{2p} y(t) \cos \omega t d(\omega t) = \frac{2}{p} \int_0^p y(t) \cos \omega t d(\omega t) \\ &= \frac{2}{p} \left[\int_0^{q_1} k(A \sin \omega t - b) \cos \omega t d(\omega t) + \int_{q_1}^{q_2} M \cos \omega t d(\omega t) \right. \\ &\quad \left. + \int_{q_2}^p k(A \sin \omega t + b) \cos \omega t d(\omega t) \right] \\ &= \frac{-4Mb}{pA} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_1 &= \frac{1}{p} \int_0^{2p} y(t) \sin \omega t d(\omega t) = \frac{2}{p} \int_0^p y(t) \sin \omega t d(\omega t) \\ &= \frac{2}{p} \left[\int_0^{q_1} k(A \sin \omega t - b) \sin \omega t d(\omega t) + \int_{q_1}^{q_2} M \sin \omega t d(\omega t) \right. \\ &\quad \left. + \int_{q_2}^p k(A \sin \omega t + b) \sin \omega t d(\omega t) \right] \\ &= \frac{kA}{p} \left[\sin^{-1} \frac{M + kb}{kA} + \sin^{-1} \frac{M - kb}{kA} + \frac{M + kb}{kA} \sqrt{1 - \left(\frac{M + kb}{kA}\right)^2} + \frac{M - kb}{kA} \sqrt{1 - \left(\frac{M - kb}{kA}\right)^2} \right] \end{aligned}$$

所以反衝飽和非線性的描述函數為

$$\begin{aligned}
 N(A) &= \frac{B_1 + jA_1}{A} \\
 &= \frac{k}{p} \left[\sin^{-1} \frac{M+kb}{kA} + \sin^{-1} \frac{M-kb}{kA} + \frac{M+kb}{kA} \sqrt{1 - \left(\frac{M+kb}{kA}\right)^2} + \frac{M-kb}{kA} \sqrt{1 - \left(\frac{M-kb}{kA}\right)^2} \right] \\
 &\quad - j \frac{4Mb}{pX^2} \qquad (2.2.4)
 \end{aligned}$$

反衝飽和非線性元件的描述函數 $N(X)$ 是正弦輸入振幅 X 的多值函數，與正弦輸入信號的頻率 ω 無關。

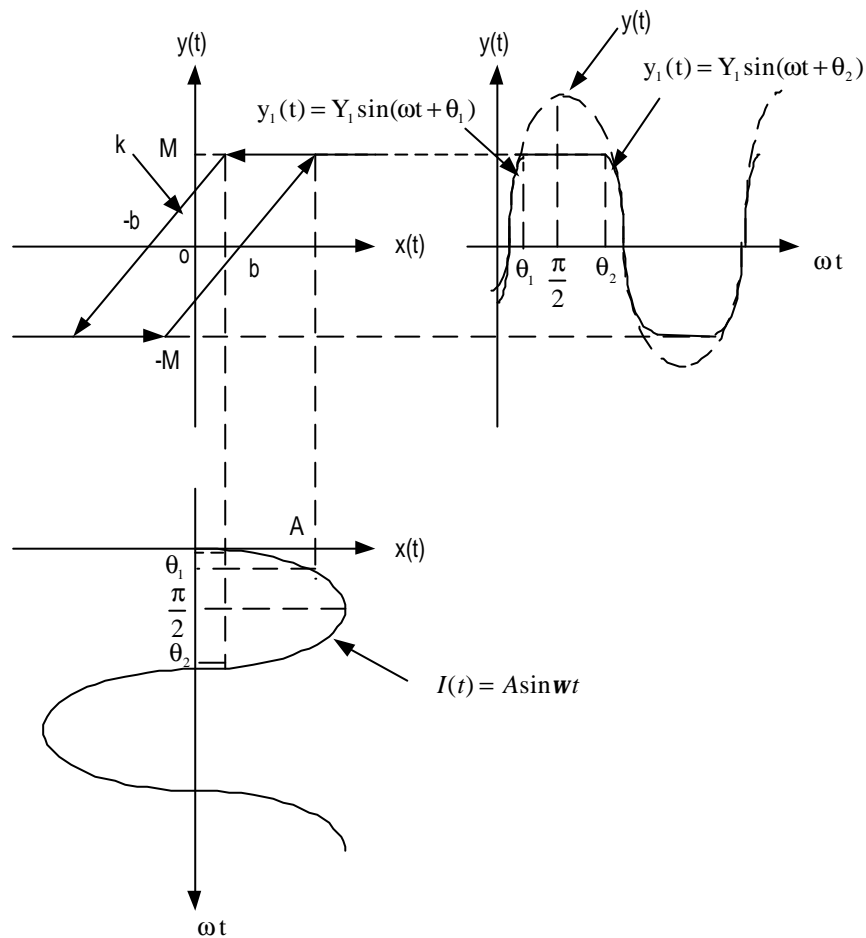


Fig. 2.3 反衝飽和非線性及其輸入、輸出波形

由於 Fig. 2.4 之積分方向為逆時針方向，此方向與電感發生磁滯時之方向相同，故電感磁滯效應較嚴重時，可直接利用式(2.2.4)來描述磁滯現象。

2.2.3 飽和(saturated)非線性

一般而言，物理元件都有其輸出的最大極限，例如放大器的輸出電壓、馬達的轉速及扭力等。Fig. 2.4 及為一飽和非線性之輸入對輸出之特性曲線。輸入信號為 $x(t)$ ，輸出信號為 $y(t)$ 。對於小的輸入信號，飽和元件的輸出量與輸入量成正比；對於大的輸入信號，輸出量的增大不是成比例的，而對於非常大的輸入信號，輸出量則保持在最大可能的輸出常數上，當輸入為正弦信號時，輸出量的波形如 Fig. 2.4 所示。

輸入： $I(t) = A \sin \omega t$

$$\text{輸出： } y(t) = \begin{cases} KA \sin \omega t & 0 \leq \omega t \leq b \\ KS & b \leq \omega t \leq p - b \\ KA \sin \omega t & p - b \leq \omega t \leq p \end{cases}$$

其中

$$b = \sin^{-1} \frac{S}{A}$$

輸出信號之傅立葉級數展開中的基本波為

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{2}{p} \int_0^b KA \sin^2 \omega t d(\omega t) + \\ &\quad \frac{2}{p} \int_b^{p-b} KS \sin \omega t d(\omega t) + \\ &\quad \frac{2}{p} \int_{p-b}^p KA \sin^2 \omega t d(\omega t) \\ B_1 &= \frac{2}{p} \int_0^b KA \sin \omega t \cos \omega t d(\omega t) + \\ &\quad \frac{2}{p} \int_b^{p-b} KS \cos \omega t d(\omega t) + \\ &\quad \frac{2}{p} \int_{p-b}^p KA \sin \omega t \cos \omega t d(\omega t) \end{aligned}$$

由於飽和非線性是單點奇對稱，故 $A_1 = 0$ ，

$$B_1 = \frac{2KA}{p} \left[\sin^{-1} \frac{S}{A} + \frac{S}{A} \sqrt{1 - \left(\frac{S}{A}\right)^2} \right]$$

則其描述函數可表示為：

$$\begin{aligned}
 N(A) &= \frac{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}}{A} \angle \tan^{-1} \frac{A_1}{B_1} \\
 &= \frac{2K}{p} \left[\sin^{-1} \frac{S}{A} + \frac{S}{A} \sqrt{1 - \left(\frac{S}{A}\right)^2} \right] \angle 0^\circ
 \end{aligned}
 \tag{2.2.5}$$

飽和非線性的描述函數是輸入信號之振幅的實值函數，與輸入信號的頻率無關。

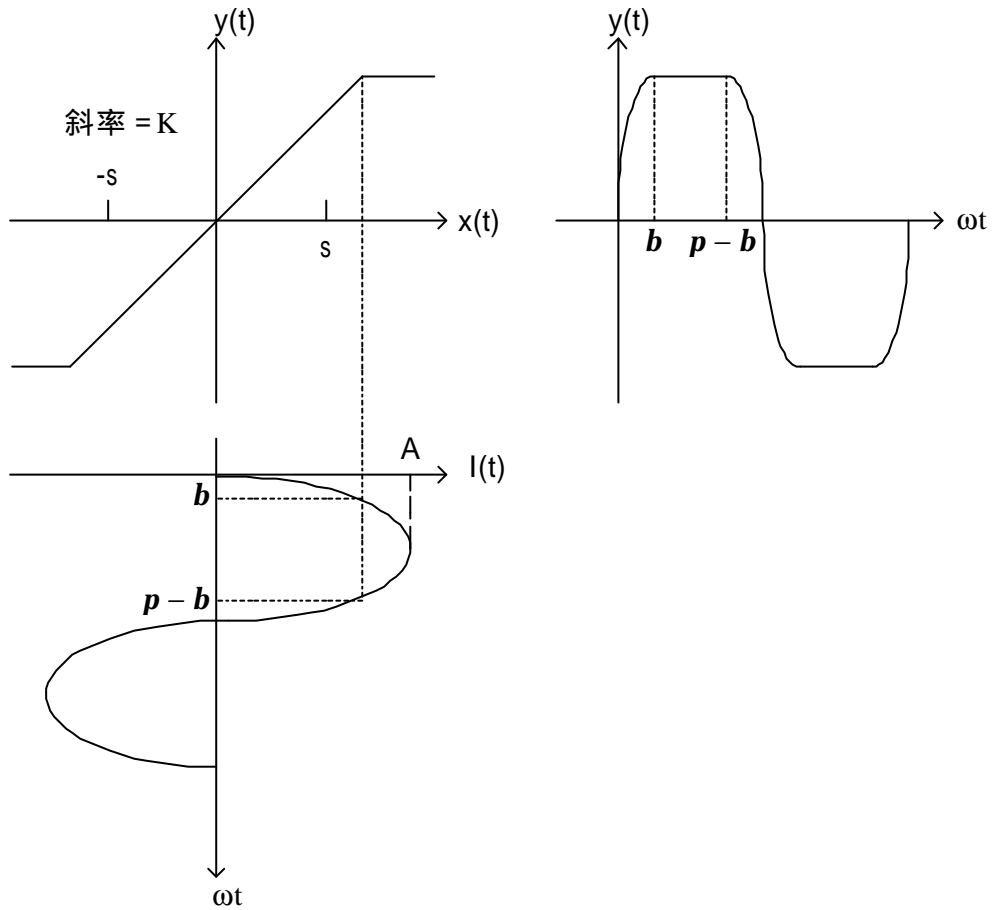


Fig. 2.4飽和非線性之輸入與輸出特性圖

第三章 電感及被動濾波器

3.1 電感器

電感器 (Inductor) 是根據磁場的現象做成的電路元件，其中磁場的來源是電荷在流動 (電流) 所形成。當電流隨時間變動時，磁場也跟著時間變動，於是在這個磁場所交鏈的導體中感應出一個電壓，電感這個電路參數，就是表示感應電壓與電流之間的關係，電感的符號以 L 表示，單位為亨利 (H)，電路圖形以捲成的線圈來表示，如 Fig. 3.1 所示。

電感器其本身不像電阻一樣消耗能量，它的功能在儲存能量，並且可以與其他元件組成電路以發揮作用，如 Fig. 3.1 所示，其匝數從一匝到數百匝都有，由於應用的場合不同，相對的設計也不同。在圖中電流 i 建立在磁通量 ϕ ，端電壓 v 為感應電壓，是由磁場的感應而產生。

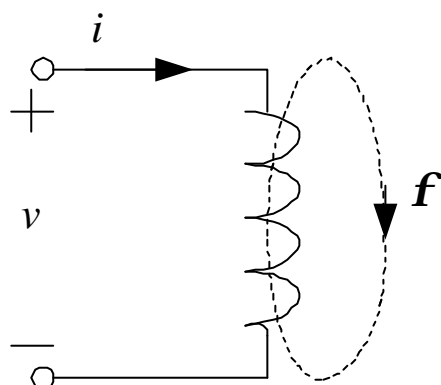


Fig. 3.1 電感器示意圖

根據法拉第定律：一多匝線圈，若通過該線圈的磁通量發生變化，則該線圈會產生一感應電壓，其電壓之大小與線圈的匝數及通過線圈磁通量的變化率成正比，即：

$$v = N \frac{d\phi}{dt} \quad (3.1.1)$$

其中， N 為電感之匝數，而 $\frac{d\phi}{dt}$ 是磁通量的變化率。

假設一 N 匝的線圈，繞於截面積 A 平方米，平均長度為 ℓ 米，導磁係數為 μ 的鐵芯物質上，如 Fig. 3.2 所示，通過之電感電流為 i 安培，則所產生的磁通韋伯數為：

$$\phi = \frac{F}{\mathfrak{R}} = \frac{Ni}{\frac{\ell}{\mu A}} = \frac{\mu ANi}{\ell} \quad (3.1.2)$$

則此線圈的電感為：

$$L = \frac{N\phi}{i} = \frac{\mu AN^2}{\ell} \quad (3.1.3)$$

其中

L ：電感的電感量

μ ：鐵芯物質的導磁係數，其值為 $\mu \times 4\pi \times 10^{-7}$ 韋伯/安培-米

ℓ ：磁路長度

N ：線圈匝數

A ：鐵芯面積

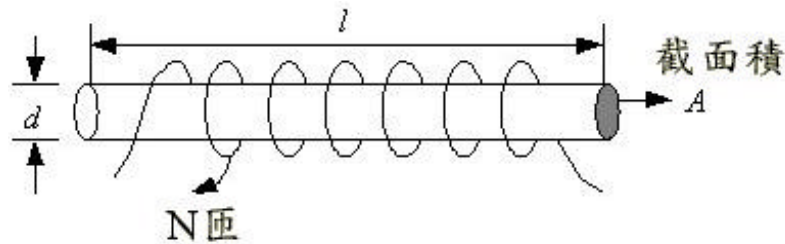


Fig. 3.2 螺線形電感示意圖

由式(3.1.3)知

$$N\phi = Li \quad (3.1.4)$$

其中 N 和 L 不會隨著時間變動而改變，所以 $N\phi$ 與 Li 的變化率分別是 $N \frac{d\phi}{dt}$ 和

$L \frac{di}{dt}$ ，因此，式(3.1.4)可以寫成：

$$N \frac{d\phi}{dt} = L \frac{di}{dt} \quad (3.1.5)$$

將式(3.1.5)代回式(3.1.1)，可以得到電感器之感應電壓與感應電流之間的關係為

$$v = L \frac{di}{dt} \quad (3.1.6)$$

因為磁交鏈 $\lambda = N\phi$ ，所以可以將式(3.1.5)改寫成

$$\frac{d\lambda}{dt} = L \frac{di}{dt} \quad (3.1.7)$$

因此，自電感在 $\lambda - I$ 曲線上的定義即為 $\lambda - I$ 曲線上每一點之斜率，可表示為

$$L = \frac{d\lambda}{di} \quad (3.1.8)$$

式(3.1.8)只適用於未飽和的小信號模型，而飽和後之大信號模型計算必須採用描述函數法計算。

3.2 濾波器描述函數

當濾波器之電感元件在大電流的情況下，電感會產生磁滯現象，此時電感之自感值不再是一個定值，會隨著電流增加而自感值下降。利用第二章所介紹之反衝非線性描述函數來表示自感值。

1. 電流在大電流磁滯飽和電流以下時，利用 Fig. 3.3 所示之描述函數將非線性電感線性化。
2. 電流在大電流磁滯之飽和電流以上時，可以 Fig. 3.4 所示之描述函數將非線性電感線性化。

$A(t)$ ：輸入之交流電流的振幅大小

I ：在電感上之磁交鏈。

描述函數 $N(A)$ 可表示為：

$$N(A) = \frac{k}{\pi} \left[\frac{\pi}{2} + \sin^{-1} \left(1 - \frac{2b}{A} \right) + 2 \left(1 - \frac{2b}{A} \right) \sqrt{\frac{b}{A} \left(1 - \frac{b}{A} \right)} + j \frac{4kb}{\pi A} \left(\frac{b}{A} - 1 \right) \right] \quad (3.2.1)$$

$(A > b)$

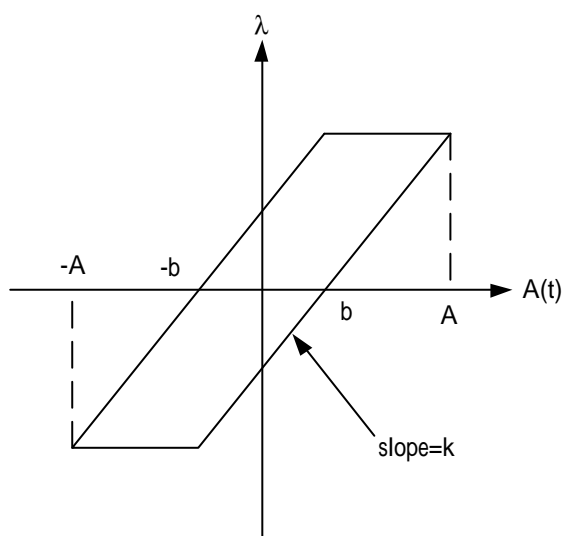


Fig. 3.3 小電流磁滯之描述函數

$A(t)$ ：輸入之交流電流的振幅大小

I ：在電感上之磁交鏈。

描述函數 $N(A)$ 可表示為：

$$N(A) = \frac{k}{\pi} \left[\sin^{-1} \frac{M+kb}{kA} + \sin^{-1} \frac{M-kb}{kA} + \frac{M+kb}{kA} \sqrt{1 - \left(\frac{M+kb}{kA} \right)^2} \right. \\ \left. + \frac{M-kb}{kA} \sqrt{1 - \left(\frac{M-kb}{kA} \right)^2} \right] - j \frac{4Mb}{\pi A^2} \quad (A > \frac{M+kb}{k}) \quad (3.2.2)$$

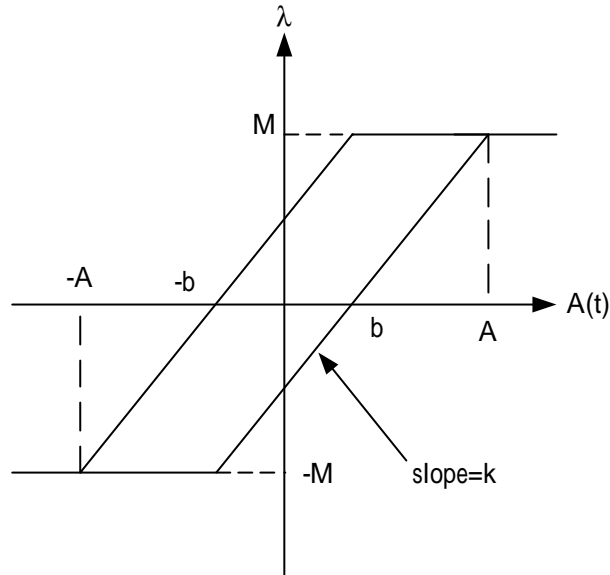


Fig. 3.4 大電流磁滯之描述函數

3.3 LR 低通濾波器 (LR low-pass filter)

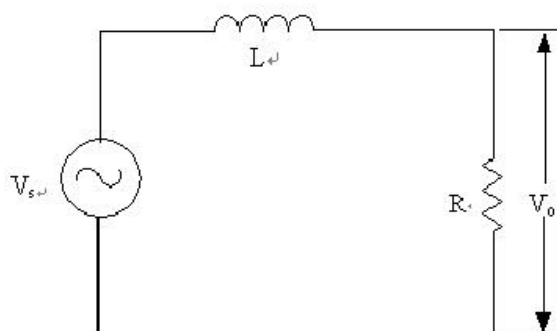


Fig. 3.5 LR低通濾波器示意圖

如 Fig. 3.5 所示，有一 LR 低通濾波器，當電感未產生磁滯現象時，轉移函數可定義為：

$$H_1(s) = \frac{V_o(s)}{V_s(s)} = \frac{R}{Ls + R} \quad (3.2.3)$$

假設輸入電壓為弦波穩態時，令 $s = j\omega$ 代入上式中

$$H_1(j\omega) = \frac{V_o(j\omega)}{V_s(j\omega)} = \frac{R}{j\omega L + R} \quad (3.2.4)$$

當電感產生磁滯現象時，可將式 3.2.3 修正為

$$H_1(s) = \frac{V_o(s)}{V_s(s)} = \frac{R}{N(A)s + R} = \frac{R}{L_1 + \frac{s}{\omega}(L_2) + R} \quad (3.2.5)$$

假設輸入電壓為弦波穩態時，令 $s = j\omega$ 代入上式中

$$H_1(j\omega) = \frac{V_o(j\omega)}{V_s(j\omega)} = \frac{R}{N(A(j\omega)) + R} = \frac{R}{(R + \omega L_2) + j\omega L_1} \quad (3.2.6)$$

其中 L_1 ：磁滯描述函數之實部值

L_2 ：磁滯描述函數之虛部值

則

$$Z = \sqrt{(R + \omega L_2)^2 + (\omega L_1)^2} \quad (3.2.7)$$

$$f(A) = A - \frac{|V_i|}{Z} = 0$$

假設以電路之弦波穩態分析配合描述函數，可以求出在弦波輸入情況下電感之非線性穩態時之電流振幅大小，只要求解上式。

3.4 模擬與實驗結果

實驗模擬:

如 Fig. 3.5 所示，一 LR 低通濾波器電路，電感為環形線圈電感，詳細尺寸如下：環形框架內徑 a 為 50mm，外徑 b 為 60mm，高度 h 為 20mm，環繞環形框架之匝數為 400 匝，環形框架之材質為矽鐵(silicon iron，最大磁通密度 B_{max} 為 0.75Tesla，相對導磁係數 μ 為 7000)，環形線圈電感框架之截面積 $AREA$ 為 $(b-a) \times h = 200(\text{mm}^2)$ ，最大磁交鏈 $\Phi_{max} = B_{max} \times AREA \times TURNS = 0.06(\text{Wb-turns})$

R 為 10.2 Ω ，自電感為 31.8mH，最大磁交鏈為 0.4817Wb-Turn，利用 Fig. 3.6 之電路途量測電感之磁滯曲線與磁化曲線，其結果如 Fig. 3.7 所示。

由 Fig. 3.8 所示，可得知在不同電流下(即不同電壓源之輸入)，電感之不同自電感值。當流經電感之電流在飽和電流以下時，電感器之自電感即為線性自電感值，而當流經電感之電流在飽和電流以上時，電感器之自電感值隨著電流增大而降低，其自電感值下降趨勢與非線性穩態電流振幅 s 有關，而與輸入頻率無關，如 Fig. 3.8 所示，當電流愈大時，自電感值愈小。若流經電感之電流遠低於飽和電流時，電感器之自電感值即為線性自電感。雖然由飽和描述函數所求出之等效自電感與實際非線性電感仍存有一些誤差，但是卻不失為提供估測電感在飽和情況下之自電感的一種好方法。

將自電感及最大磁交鏈代入式 3.2.2，求出非線性飽和曲線 a, b 之值，可求出以描述函數法求得之等效電感，再代入 L_1 ，即可得到系統在線性與以描述函數法之模擬。

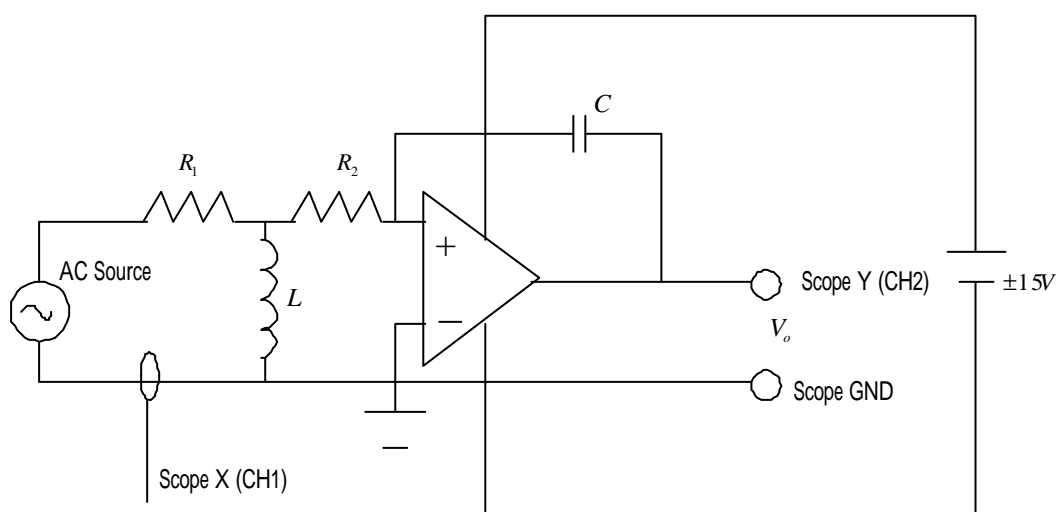


Fig. 3.6 磁滯曲線量測示意圖

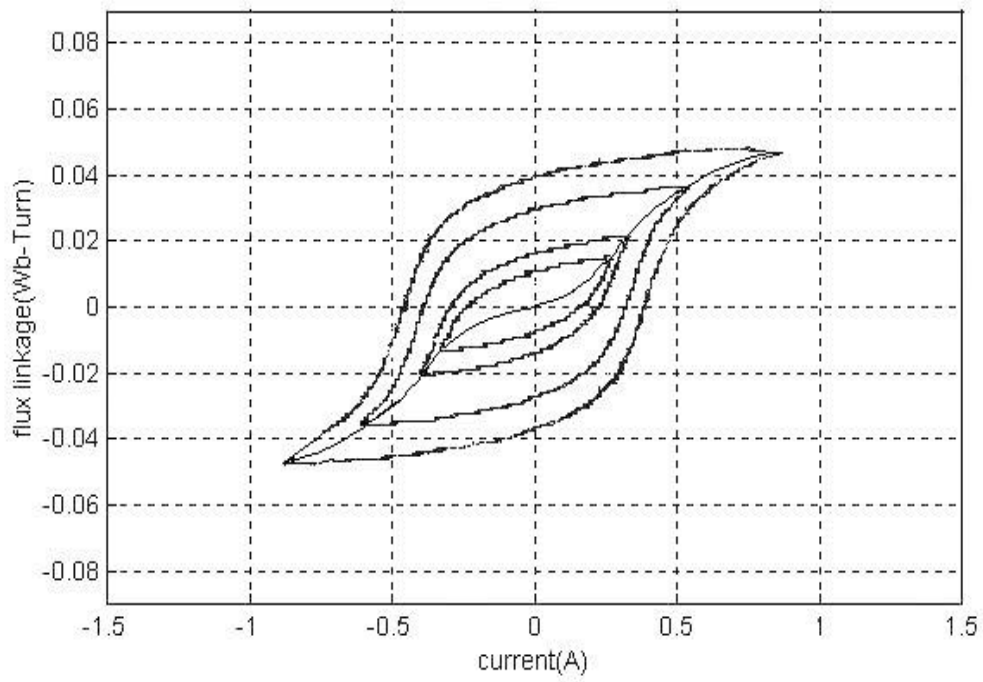


Fig. 3.7 環形線圈電感磁化曲線與磁滯曲線圖

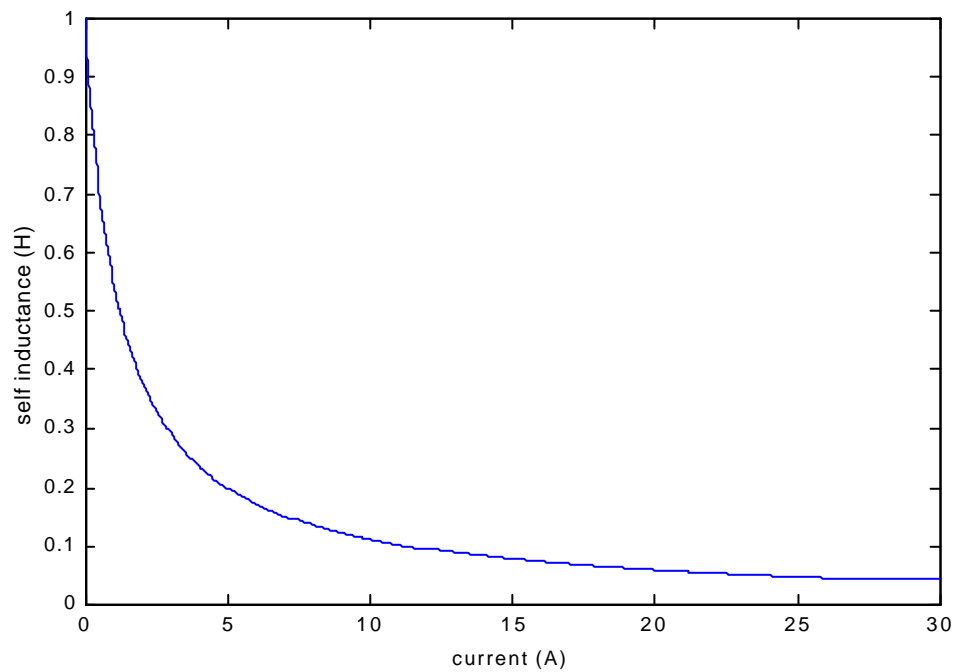


Fig. 3.8 電感飽和時之自感與電流大小關係圖

本實驗之方塊圖如 Fig. 3.9 所示，採用變頻器來做 LR 濾波器之波德圖實驗。

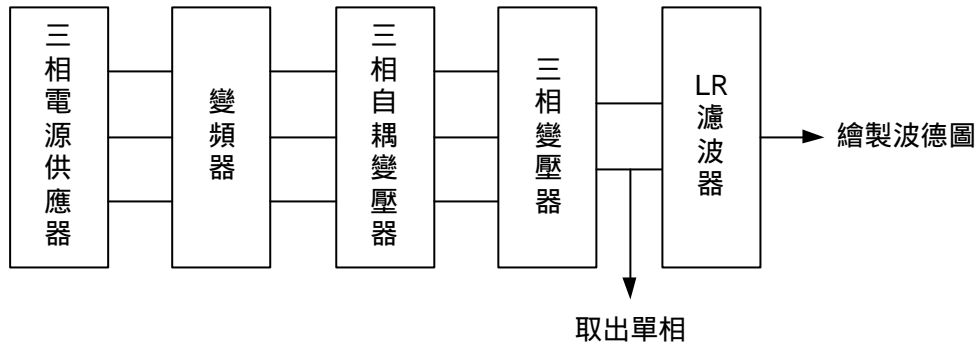


Fig. 3.9 LR實驗電路流程圖

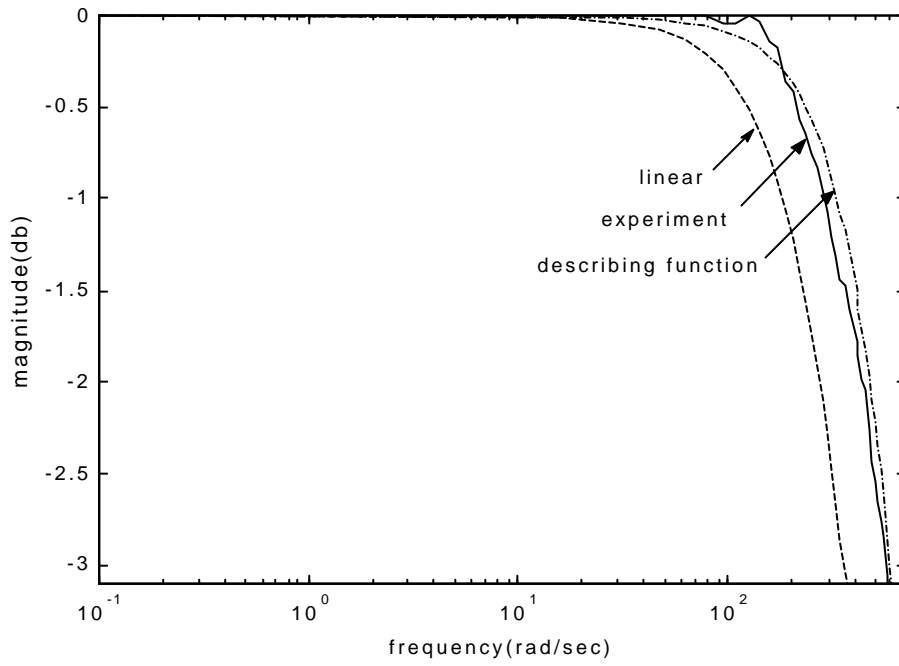


Fig. 3.10 輸入電壓20伏特時之LR一階低通濾波器波德大小圖

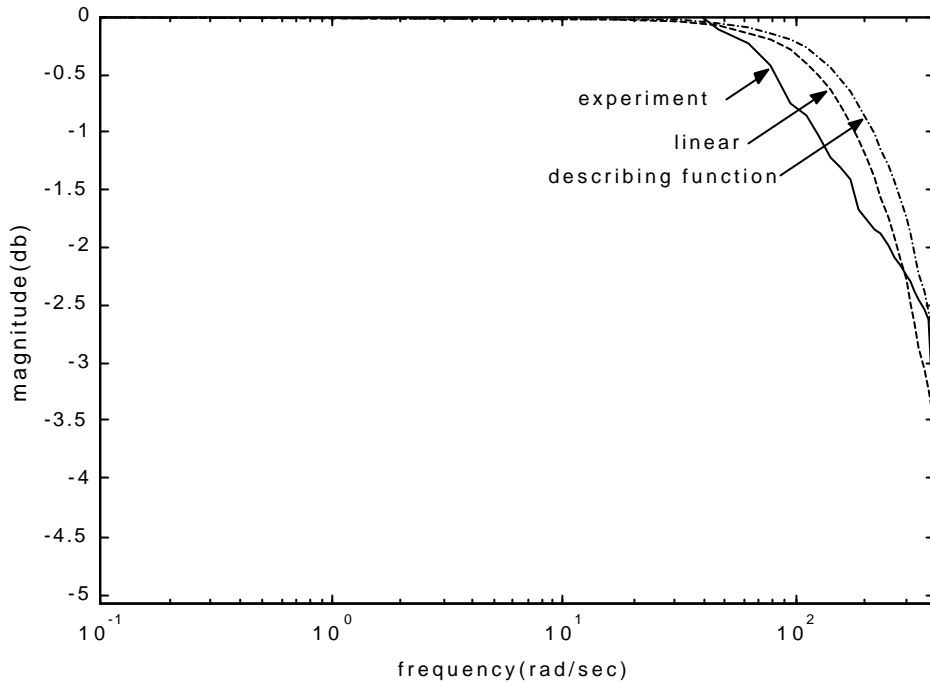


Fig. 3.11 輸入電壓5.2伏特時之LR一階低通濾波器波德大小圖

比較此 LR 低通濾波器之線性、實驗、飽和描述函數模擬結果，由 Fig. 3.8 , Fig. 3.10 , Fig. 3.11 之結果得知，當流經電感之電流超過飽和電流 i_{SAT} 時，電感之自電感值會下降，LR 低通濾波器截止角頻率往高頻移動，造成高頻雜訊進入 LR 低通濾波器，使得高頻之雜訊無法被濾波器濾掉，濾波之效果因而大打折扣。若流經電感之電流遠小於電感飽和電流，則非線性電感可視為線性電感，描述函數法之波德大小圖會與線性波德大小圖重疊。故可由波德大小圖 3db 角頻率之大小來估計線性自電感值。由於飽和描述函數模擬曲線比線性模擬曲線更接近非線性模擬曲線，故飽和描述函數除了可以說明電感飽和後濾波截止角頻率往高頻移動之現象外，亦可應用於大電流下含有電感濾波電路的設計。

理論模擬:

如 Fig. 3.5 所示，一 LR 低通濾波器電路，將電感之參數代入電感公式，求得此環形線圈之自電感為：

$$L = \frac{\mu N^2 h}{l} \ln \frac{b}{a} = 0.8168 \text{ (H)}$$

將 R 及 L 值代入式 3.2.4：

$$H_1(j\omega) = \frac{V_o(j\omega)}{V_s(j\omega)} = \frac{R}{R + j\omega L}$$

當 $|H_1(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{2}} |H_1(j\omega)|_{\max}$ 可得系統在線性時之 3dB 截止角頻率

$$\text{故 } \omega = \omega_{c1} = \frac{R}{L} = \frac{10}{0.8168} = 12.25(\text{rad/sec})$$

其中： ω_{c1} :系統在線性時之 3dB 截止角頻率

再分別求出常數 a 及 b，其中 b 表示此電感之飽和電流：

$$a=0.8168$$

$$b=13.61$$

故飽和電流為 13.61 安培(A)

將非線性電路之穩態電流 A 及常數 a、b 值代入式 3.2.2，可求出等效電感 L_1 ，再將 L_1 代入式 3.2.7，即可得到系統在線性與以描述函數法之模擬，如 Fig. 3.12，Fig. 3.13 所示。

由模擬之結果可以知道，描述函數所得之濾波頻率比經由傳統線性理論所求得之濾波頻率更接近實際的系統，雖然仍然有誤差，但已經足夠提供電路設計者一個重要的參考依據。

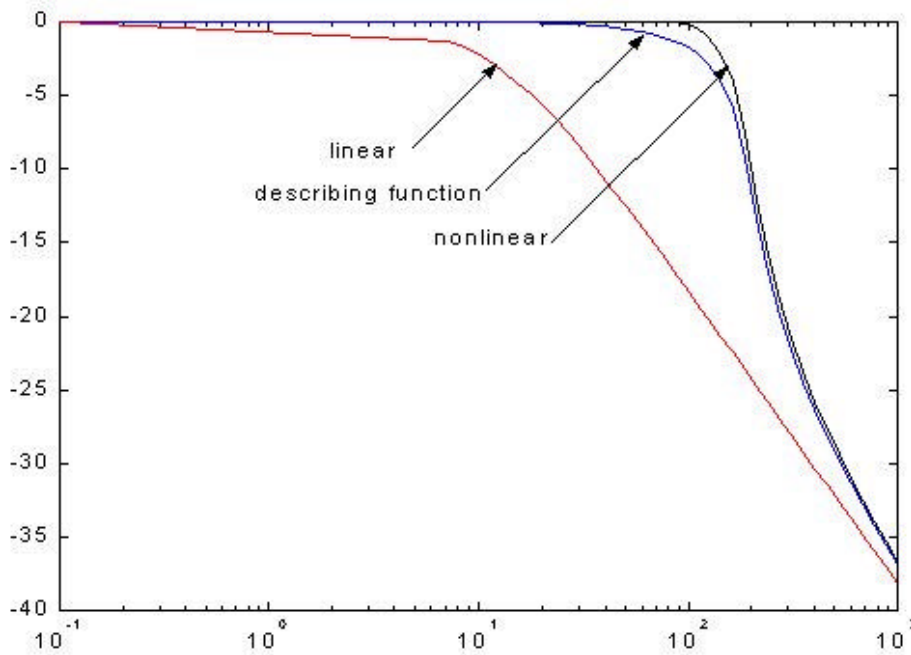


Fig. 3.12 輸入電壓20伏特時之LR一階低通濾波器波德大小圖

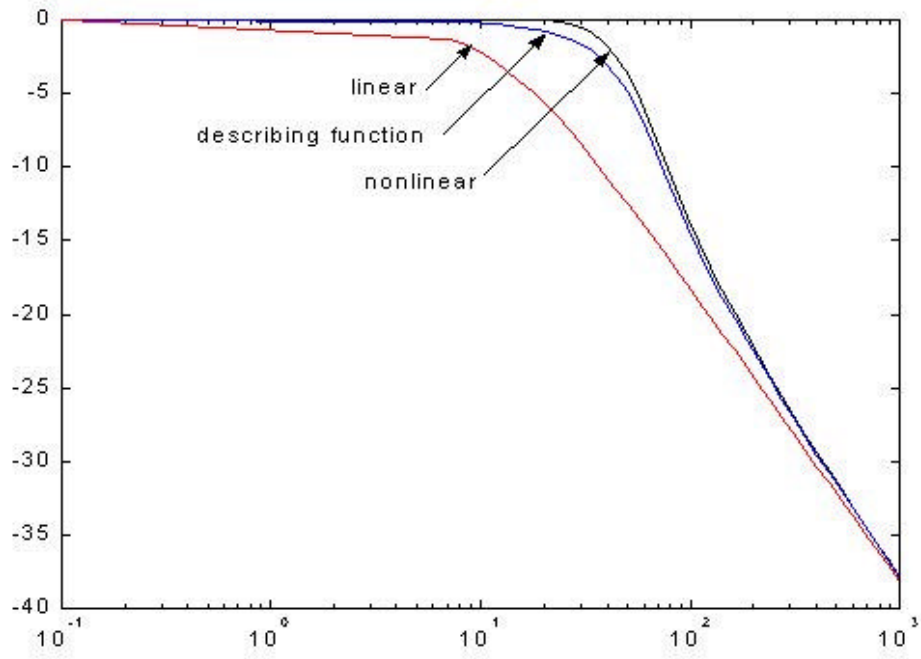


Fig. 3.13 輸入電壓3伏特時之LR一階低通濾波器波德大小圖

第四章 變壓器

4.1 理想變壓器

變壓器是一種利用電磁感應的作用，把某一電壓準位的電能，轉換為另一電壓準位的裝置。變壓器由兩個或多個線圈纏繞於同一個鐵磁性材料所組成，線圈間均不直接連接，僅僅由存在於鐵心中的共同磁通連接。

大部分的變壓器均有固定鐵心，其上繞有一次與二次的線圈，基於鐵材的高導磁性，大部分磁通量侷限在鐵心裡，藉此，兩組線圈可以獲得相當高程度的磁耦合在一些變壓器中，線圈與鐵心二者間緊密的結合，其一次與二次的電壓比值幾乎與二者間之線圈匝數比相同。因此，變壓器之匝數比，一般可作為變壓器升壓或降壓的參考指標。

若要分析變壓器的特性，首先，必須建立其數學模型，假設不考慮其它的損失，則此變壓器稱為理想變壓器，故此，理想變壓器必須符合下列條件：

- (1) 繞組的電阻為零，即銅損為零。
- (2) 鐵心中無渦流損及磁滯損，即鐵損為零。
- (3) 繞組間的耦合係數 k 等於 1，無漏磁通或漏電抗即 $X_1 = 0$ 。
- (4) 鐵心的導磁係數 m 為無限大或磁阻 $R = 0$ ，所以激磁電流為零。
- (5) 效率為 100% 且電壓調整率為零。

Fig. 4.1 所示為雙繞組的理想變壓器，根據楞次定律可以定出一次與二次繞組的感應電勢極性。

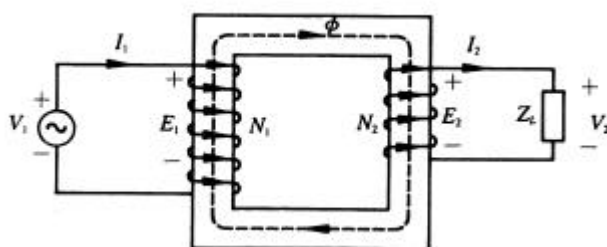


Fig. 4.1 雙繞組的理想變壓器

一次繞組加入一正弦波電壓，於鐵心中產生磁通，設 f 為 $f = f_m \sin \omega t$ ，由法拉第定律可得一次與二次繞組的感應電勢與，其值為

$$e_1 = N_1 \frac{df}{dt} = \omega f_m N_1 \cos \omega t = 2\pi f f_m N_1 \cos \omega t$$

$$e_2 = N_2 \frac{d\mathbf{f}}{dt} = \omega \mathbf{f}_m N_2 \cos \omega t = 2p f \mathbf{f}_m N_2 \cos \omega t$$

式中 \mathbf{f}_m 為鐵心中的最大磁通量，其單位為韋伯。

N_1 與 N_2 分別為一次繞組與二次繞組的匝數。

f 為電源頻率。

由 e_1 與 e_2 的波形可得感應電動勢較磁通 \mathbf{f} 領前 90° ，且其有效值 E_1 、 E_2 分別為：

$$E_1 = \frac{E_{1(\max)}}{\sqrt{2}} = \frac{2p}{\sqrt{2}} f N_1 \mathbf{f}_m = 4.44 f N_1 \mathbf{f}_m$$

$$E_2 = 4.44 f N_2 \mathbf{f}_m$$

設匝數比 a 為 N_1 與 N_2 的比值，即 $a = \frac{N_1}{N_2}$ 且 $\frac{E_1}{E_2} = \frac{N_1}{N_2} = a$

由理想變壓器的前三個條件可得 $\frac{V_1}{V_2} = \frac{E_1}{E_2} = \frac{N_1}{N_2} = a$

依理想變壓器的第四個條件可得靜磁動勢為零，即 $\frac{I_1}{I_2} = \frac{N_2}{N_1} = \frac{1}{a}$

因此， $\frac{V_1}{V_2} = \frac{E_1}{E_2} = \frac{N_1}{N_2} = \frac{I_2}{I_1} = a$

Fig. 4.2 為理想變壓器的相量圖，其中(a)為無載相量圖，(b)為有載相量圖

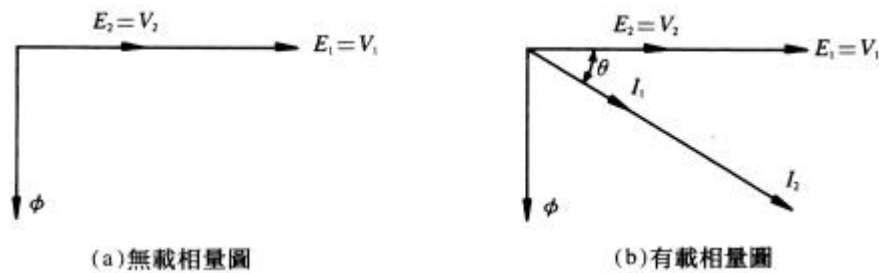


Fig. 4.2 理想變壓器的相量圖

4.2 實際變壓器

然而，前節所述之理想變壓器之模型及等效電路在實務上卻不夠精確，因此，必須考慮變壓器在實際應用時之情況，所以，必須考慮到下列因素之影響：

- (1) 一次與二次繞組的電阻 R_1 與 R_2 。
- (2) 一次與二次繞組的漏磁通 f_{l1} 與 f_{l2} 。
- (3) 產生互磁通 f 所需之磁化電流 I_m 與供應鐵損的電流 I_c 。

如此，才能正確的預測變壓器的行為。

Fig. 4.3 為實際變壓器之等效模型，中間部分的磁性系統為去除一次與二次繞組電阻後的變壓器， f_{l1} 與 f_{l2} 分別表示一次與二次繞組的漏磁通，互磁通 f 由一次與二次合成磁勢所產生，設鐵心的磁阻為 R_m ，則

$$f = \frac{N_1 i_1 - N_2 i_2}{R_m} \quad (\text{韋伯})$$

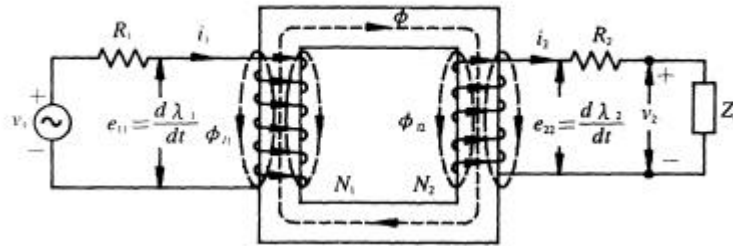


Fig. 4.4 將繞組電阻予以分離之變壓器

若兩繞組均有電流時，則與一次繞組 N_1 相交鏈的磁通 f_1 為

$$f_1 = f_{l1} + f$$

與二次繞組 N_2 相交鏈的磁通 f_2 為

$$f_2 = f - f_{l2}$$

亦即一次繞組與二次繞組的磁通鏈分別為

$$I_1 = N_1 f_1 \quad ; \quad I_2 = N_2 f_2$$

一次繞組側與二次繞組側的電壓方程式分別為

$$v_1 = R_1 i_1 + e_{11} \quad ; \quad v_2 = e_{22} - R_2 i_2$$

兩繞組所感應之電勢分別為

$$e_{11} = \frac{dI_1}{dt} = \frac{d(N_1 f_{l1})}{di_1} \frac{di_1}{dt} + e_1 \quad ; \quad e_{22} = \frac{dI_2}{dt} = -\frac{d(N_2 f_{l2})}{di_2} \frac{di_2}{dt} + e_2$$

可定義兩繞組的漏電感 L_{l1} 、 L_{l2} 及感應電勢 e_1 與 e_2 分別為

$$L_{l1} = N_1 \frac{d\mathbf{f}_{l1}}{di_1} \quad , \quad L_{l2} = N_2 \frac{d\mathbf{f}_{l2}}{di_2}$$

$$e_1 = N_1 \frac{d\mathbf{f}}{dt} \quad , \quad e_2 = N_2 \frac{d\mathbf{f}}{dt}$$

可得

$$v_1 = R_1 i_1 + L_{l1} \frac{di_1}{dt} + e_1 \quad , \quad v_2 = e_2 - L_{l2} \frac{di_2}{dt} - i_2 R_2$$

所以，我們將變壓器繞組的電阻與漏電抗分離出來的變壓器等效圖如 Fig.

4.5 所示。其中 $X_1 = \omega L_{l1}$ 為一次漏電抗， $X_2 = \omega L_{l2}$ 為二次漏電抗。

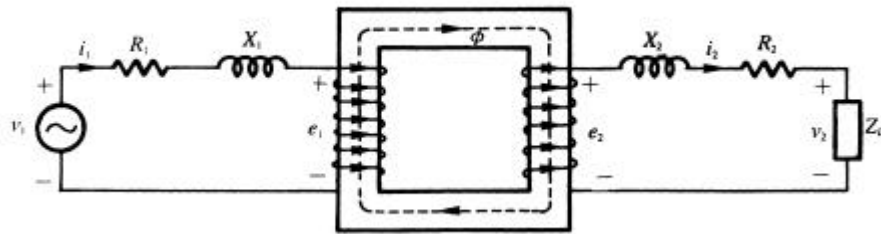


Fig. 4.5 將繞組電阻即漏電抗予以分離之變壓器

若考慮變壓器的磁化電流與供應鐵心損失的電流可繪製實際變壓器模式如

Fig. 4.6 所示。

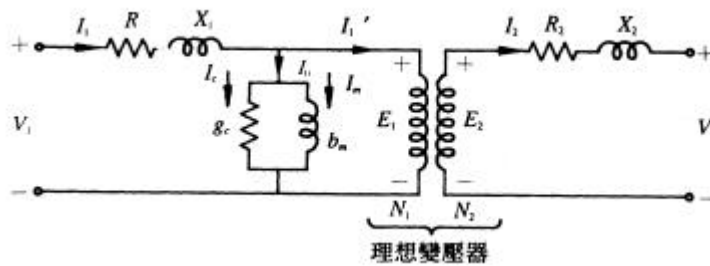


Fig. 4.6 實際變壓器模式

Fig. 4.7 與 Fig. 4.8 分別為參考至一次側與二次側的精確等效電路。

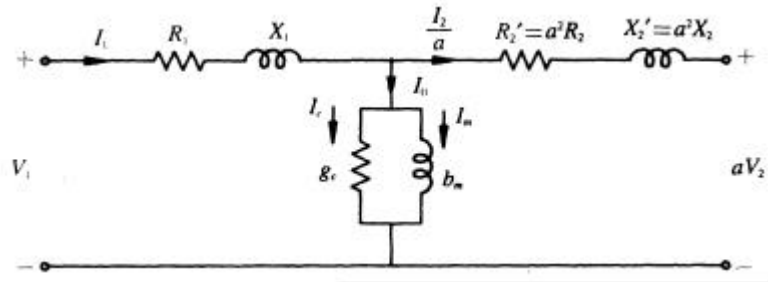


Fig. 4.7 參考至一次側的變壓器精確等效電路

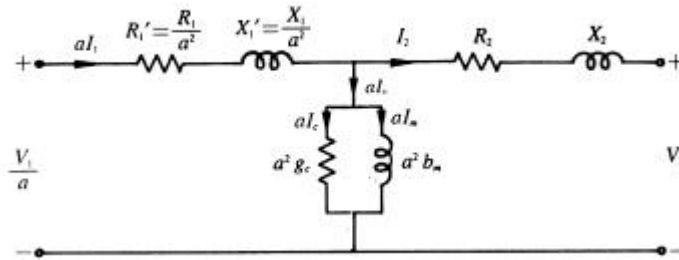
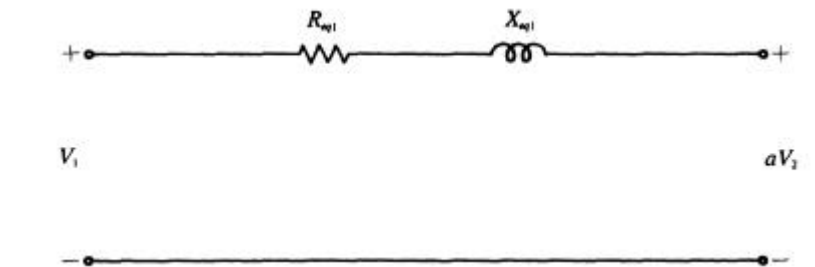
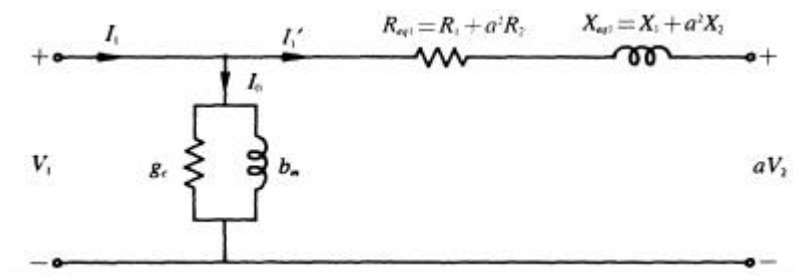


Fig. 4.8 參考至二次側的變壓器精確等效電路

然而，變壓器在計算時因考慮計算的效率，常將精確之等效電路予以簡化成 Fig. 4.9，吾人可以發現簡化後所得之變壓器的基本特性與未簡化前之誤差甚小，故此，在計算變壓器時都使用此一近似等效電路。



(a) 參考至一次側的變壓器近似等效電路



(b) 忽略激磁分枝的等效電路

Fig. 4.9 參考至一次側的近似等效電路

4.3 變壓器開路實驗

變壓器開路實驗的等效電路圖如 Fig. 4.10 所示，開路實驗的目的在測定變壓器的鐵損及激磁導納與激磁電導，

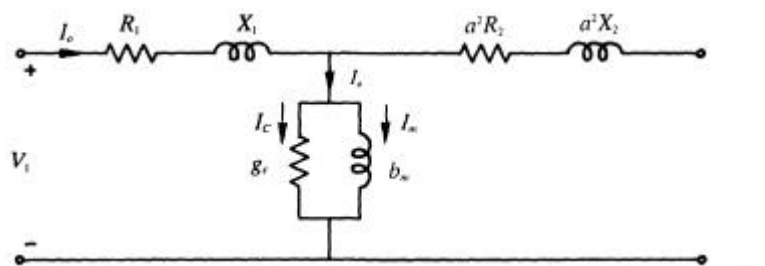


Fig. 4.10 開路實驗之等效電路

傳統之方法在變壓器的一次側加額定電壓、二次側開路，則經過變壓器的電流為無載電流，由於無載電流甚小，因此一次繞組所造成的銅損可忽略不計，所以瓦特表的讀數 P_o 可視為變壓器全部的鐵損。

安培表指示值為 I_o 、安培表指示值為 V_o ，激磁分枝的阻抗 $(R_c // jX_m) \gg (R_1 + jX_1)$ ，因此各項參數如下所示

$$\text{激磁導納 } Y_{o1} = \frac{I_o}{V_o} \quad (4.3.1)$$

$$\text{激磁電導 } g_{c1} = \frac{P_o}{V_o^2} \quad (4.3.2)$$

$$\text{激磁電納 } b_{m1} = \sqrt{Y_{o1}^2 - g_{c1}^2} \quad (4.3.3)$$

$$\text{無載時功率因數 P.F. 為 } P.F. = \cos \theta_o = \frac{P_o}{V_o I_o}$$

但因激磁電抗不能忽略之故，開路實驗不一定要在額定電壓下，然因電感之描述函數 $N(A)$ 有兩個未知數，於是重新設計開路實驗，在不同的電壓下重作開路實驗，可得兩個方程式，便可解此二未知數，其它實驗條件與傳統實驗方法均相同。

4.4 變壓器短路實驗

短路實驗的目的在求變壓器的銅損、等效電阻及等效電抗，其實驗方法為，在高壓側加額定電流且將低壓側短路，其等效電路如 Fig. 4.11 所示。

短路實驗時，高壓側之輸入電壓約為其額定電壓的 3~10% 即可達額定電流，所以瓦特計之讀值可視為變壓器的銅損。即

$$P_{sc} = I_1^2 R_1 + I_2^2 R_2 = I_1^2 [R_1 + a^2 R_2] = I_{sc}^2 R_{eq1} \quad (4.4.1)$$

設伏特計讀值為 V_{sc} 、瓦特計之讀值為 P_{sc} 、安培表的讀值為 I_{sc} ，則變壓器由高壓側所測得之等效電阻 R_{eq1} 與等效電抗 X_{eq1} 為

$$\text{等值阻抗 } Z_{eq1} = Z_{sc} = \frac{V_{sc}}{I_{sc}} \quad (4.4.2)$$

$$\text{等值電阻 } R_{eq1} = R_{sc} = \frac{P_{sc}}{I_{sc}^2} \quad (4.4.3)$$

$$\text{等值電抗 } X_{eq1} = X_{sc} = \sqrt{Z_{sc}^2 - R_{sc}^2} \quad (4.4.4)$$

但因激磁電抗在電流太大時，並不可忽略，所以電流值必須要控制的非常小，否則激磁電抗不能忽略時，其原先之方法均不能使用，Fig. 4.11 即為激磁電抗不能忽略時之等效電路。

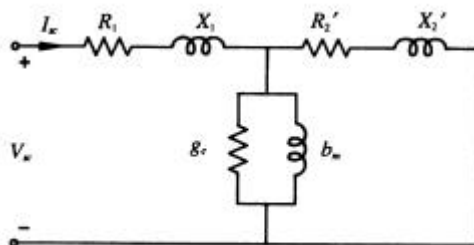


Fig. 4.11 激磁電抗不能忽略時之等效電路

實驗結果：

本實驗採用之變壓器為中信變壓器，編號為 PT-35，如 Fig. 4.12，一次側電壓為 110V，二次測為 24V，經開短路實驗，代入式 4.3.1 及 4.3.2 及 4.3.3 及 4.4.2 及 4.4.3 及 4.4.4，可測得變壓器之基本參數如下：

$$R_1 = 13.02 ;$$

$$X_1 = 7.75 ;$$

$$R_2 = 13.02 ;$$

$$X_2 = 7.75 ;$$

$$\text{匝數比 } a = 4.5643 ;$$

$$\text{初值電感為 } L_0 = 0.745$$



Fig. 4.12 變壓器之外觀

於實驗時另外提出一種方法，利用 RLC meter 來測量，首先將變壓器的二次側短路，再將一次側接到 RLC meter，所測得之電阻為 $R_1 = 12\Omega$ 及電抗為 $X_1 = 7$ ，所得之電阻及電抗為直流電阻及直流電抗，再將直流電阻及直流電抗乘上 1.1 倍，即可得到交流電阻及交流電抗，分別為 $R_1 = 13.2\Omega$ 及 $X_1 = 7.7$ ，將其值與開短路實驗所得之電阻及電抗比較，發現誤差不大，所以可以利用此種方法來求得電路參數，不必再做複雜的開短路實驗，達到簡化實驗步驟的目的。

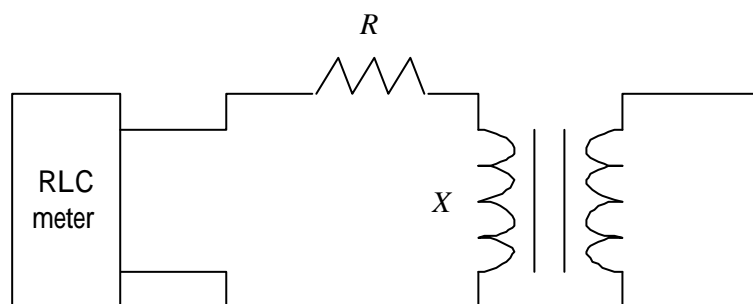


Fig. 4.13 利用 RLC meter 測量交流電阻及交流電抗

4.5 電壓調整率

由變壓器的等效電路可知，若變壓器一次側的輸入電壓維持一定，則其二次側的輸出電壓將隨負載的變動而改變，輸出電壓改變的原因為當電流經過變壓器內部阻抗時會產生電壓降所致。

欲減少變壓器的電壓變動，必須減少繞阻的電阻與漏磁通，即須選用性能良好的銅線、鐵新及一次與二次繞阻採用交互配置的方式。變壓器二次側輸出電壓隨負載變動的情形可用電壓調整率表示。

電壓調整率定義為變壓器二次側之無載時之輸出電壓 V_{2n} 與滿載(full-load)時之輸出電壓 V_{2f} 的差值，再除以滿載時之輸出電壓 V_{2f} ，則電壓調整率 VR (voltage regulation) 定義為

$$V.R.(%) = \frac{V_{2n} - V_{2f}}{V_{2f}} \times 100\% \quad (4.5.1)$$

若滿載時之輸出電壓 V_{2f} 、輸出電流 I_2 及負載功率因數角 (\mathbf{q}) 已知，則無載時之輸入電壓 V_{2n} ，依克希荷夫電壓定律求解，即

$$V_{2n} = V_{2f} + I_2 (R_{eq2} + jX_{eq2}) \quad (4.5.2)$$

根據上式，可繪製在各種不同功因下之電壓相量圖，如 Fig. 4.14 所示。

對於功因 $P.F. = 1.0$ 時之 V_{2n} 為

$$V_{2n} = \sqrt{(V_{2f} + I_2 R_{eq2})^2 + (I_2 X_{eq2})^2} \quad (4.5.3)$$

對於功因 $P.F. < 1.0$ 時之 V_{2n} 為

$$V_{2n} = \sqrt{(V_{2f} \cos \mathbf{q} + I_2 R_{eq2})^2 + (V_{2f} \sin \mathbf{q} \pm I_2 X_{eq2})^2} \quad (4.5.4)$$

(功因為滯後取+；功因為超前取-)

故此，電壓調整率應修正為

$$V.R.(%) = \frac{\frac{V_1}{a} - V_{2f}}{V_{2f}} \times 100\% = \frac{V_1 - aV_{2f}}{aV_{2f}} \times 100\% \quad (4.5.5)$$

即電壓調整率亦可由一次側計算。

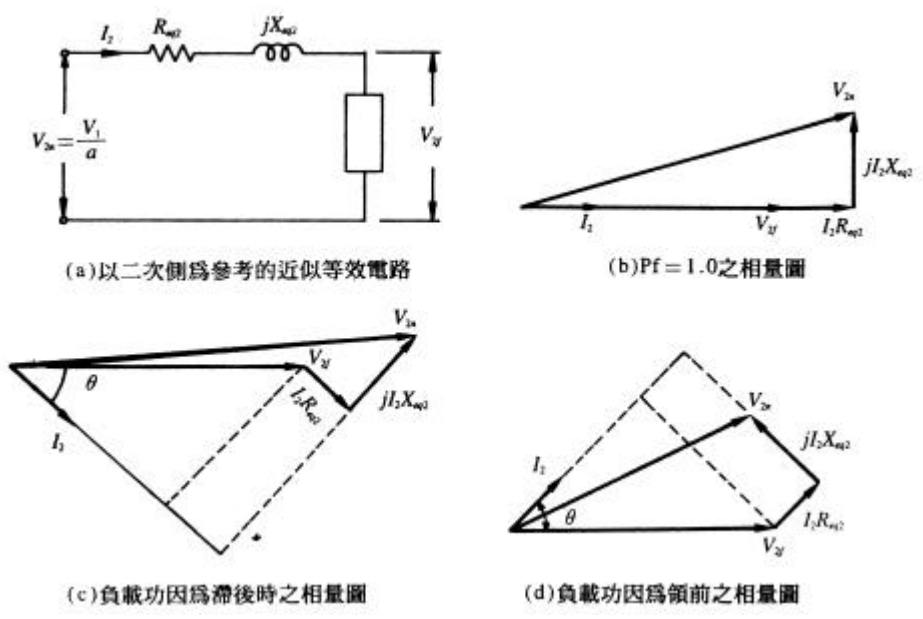


Fig. 4.14 以二次側為參考側的等效電路與相量圖

4.6 加入激磁電抗之影響

以往在計算變壓器之電路時，因為認為激磁電抗 X_m 為一常數，故為簡化電路計算，都將激磁電抗及激磁電阻忽略，其計算所得之結果與精確電路所得之結果誤差並不大，但經實驗發現電感並非是一常數，其大小會隨電流大小而改變，電流愈大電感值則愈小，因此在變壓器之等效電路中，激磁電抗並不能忽略，所以必須修正電壓調整率之公式，Fig. 4.15 為變壓器之等效電路圖。

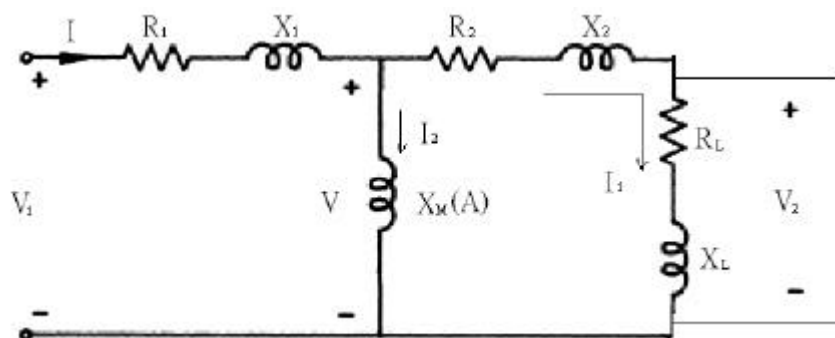


Fig. 4.15 為變壓器之等效電路圖

其中：

$$R_1 = \frac{R_{11}}{a^2}$$

$$X_1 = \frac{X_{11}}{a^2}$$

其中：

R_{11} ：一次側電阻

X_{11} ：一次側漏電抗

定義

$$R_{eq} = R_2 + R_L$$

$$X_{eq} = X_2 + X_L$$

則電壓調整率為：

$$V.R. = \frac{V_2 - V_1}{V_2} = 1 - \frac{V_1}{V_2}$$

$$V_2 = V \times \frac{R_L + jX_L}{R_{eq} + jX_{eq}} \quad (4.6.1)$$

$$V = V_1 \times \frac{(R_{eq} + jX_{eq}) // (jX_M(A))}{(R_1 + jX_1) + (R_{eq} + jX_{eq}) // (jX_M(A))} \quad (4.6.2)$$

根據 4.6.1 及 4.6.2 , 可解得 V_2 為 :

$$V_2 = V_1 \times \frac{(-X_L X_M(A)) + j(R_L X_M(A))}{(R_1 R_{eq} - X_1 X_{eq} - X_1 X_M(A) - X_{eq} X_M(A)) + j(R_1 X_{eq} + R_1 X_M(A) + R_{eq} X_1 + R_{eq} X_M(A))} \quad (4.6.3)$$

因此 , 電壓調整率為 :

$$V.R. = 1 - \frac{\sqrt{(R_1 R_{eq} - X_1 X_{eq} - X_1 X_M(A) - X_{eq} X_M(A))^2 + (R_L X_{eq} + R_1 X_M(A) + R_{eq} X_1 + R_{eq} X_M(A))^2}}{\sqrt{(X_L X_M(A))^2 + (R_L X_M(A))^2}}$$

而激磁電流 I_2 為 :

$$I_2 = \frac{\sqrt{(V_1 R_{eq})^2 + (V_1 X_{eq})^2}}{\sqrt{[R_1 R_{eq} - X_1 X_{eq} - X_1 X_M(A) - X_{eq} X_M(A)]^2 + [R_{eq} X_1 + R_1 X_{eq} + R_1 X_M(A) + R_{eq} X_M(A)]^2}}$$

$$|I_2| = A$$

激磁電抗 $X_M(A)$ 為 :

$$X_M(A) = \mathbf{w} \cdot N(A)$$

4.7 模擬與實驗結果

電壓調整率模擬：

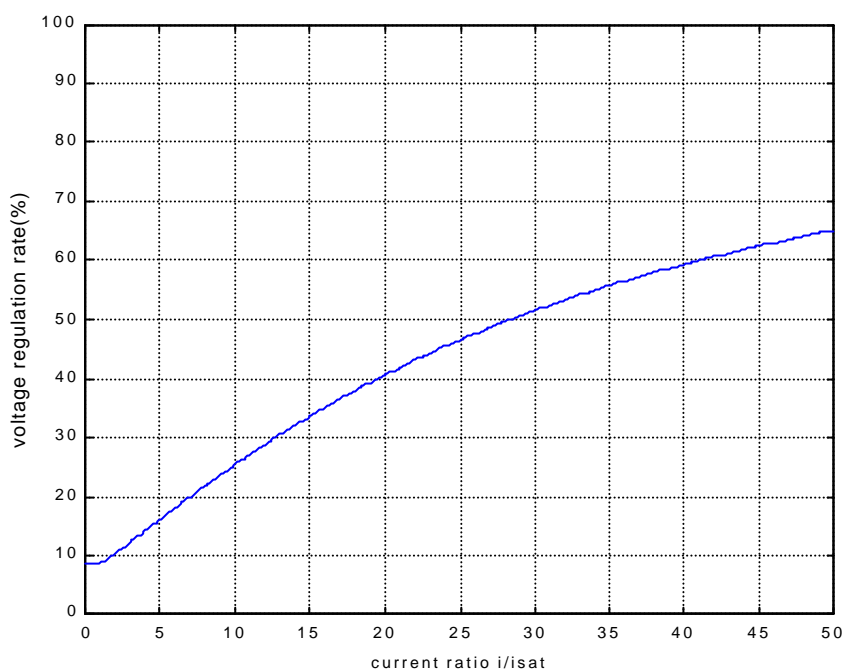


Fig. 4.16 電壓調整率於電流變動下之模擬

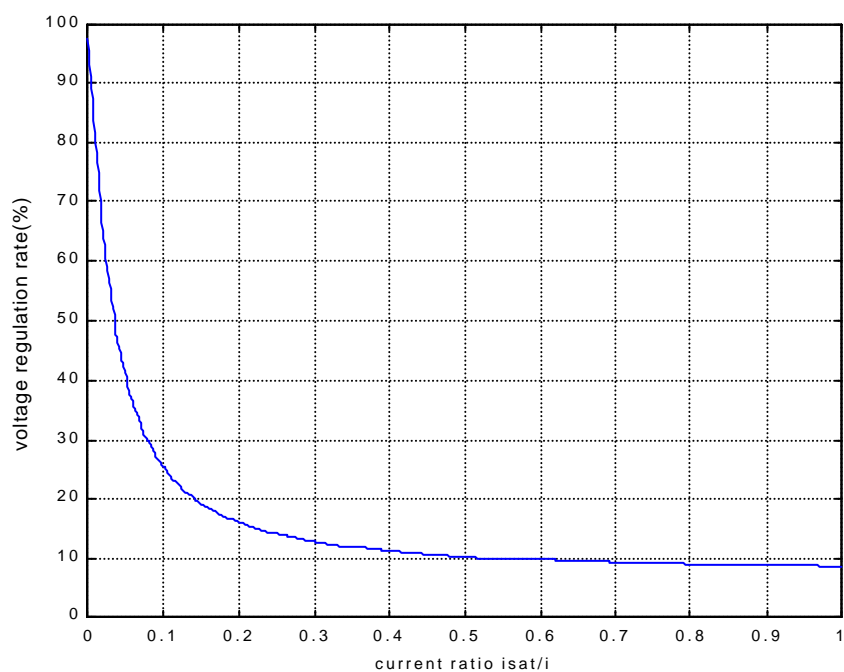


Fig. 4.17 電壓調整率在飽和電流變動下之模擬

Fig. 4.16 的橫座標為電流對飽和電流的比值，由圖中可發現當電流超過飽和電流後，電壓調整率及不斷的升高，此現象將導致系統的基本設計隨之改變，效

率也將隨之變差，而 Fig. 4.17 的橫座標則是飽和電流對電流的比值，不斷調整飽和電流，其特性其實與 Fig. 4.16 是一樣的。

電壓調整率之實驗結果：

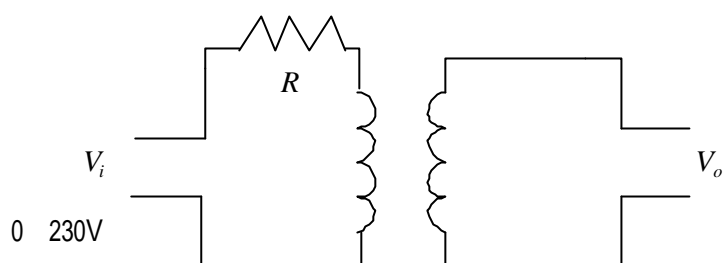


Fig. 4.18 電壓調整率之實驗電路圖

電壓調整率的實驗利用再一次側輸入交流電壓，並且在二次側測量輸出電壓，輸入電壓從 0 開始增加，最高可增加至 230 伏特，所得之數據再代入電壓調整率之公式，求出電壓調整率，Fig. 4.19 為實際變壓器去做電壓調整率實驗，再利用 MATLAB 繪製得到的實驗圖，此變壓器的飽和電流為 0.745A，當電流超過飽和電流之後就開始上升，隨著電流越高，電壓調整率也越來越高。

本實驗中所利用來解非線性代數方程式之方法為二分法，假設 $f(x) = 0$ 的根存在一已知的初始區間，然後進行區間縮減，直到對根要求之準確性達到為止。此方法是給予一所在的起始區間，判斷跟在條件的左區間或右區間，選擇剩下的區間在將其區分為二，再進行判斷，如此重複的運算，直到誤差小於所要求之值，將所得之理論結果繪於 Fig. 4.20 中，Fig. 4.20 則是理論模擬結果與實驗結果之比較，由圖中可發現理論模擬之結果與實驗結果之誤差很小。Fig. 4.21 為傳統理論與描述函數模擬及實驗值三者之比較圖，由圖中可知描述函數所得之模擬較傳統精確。

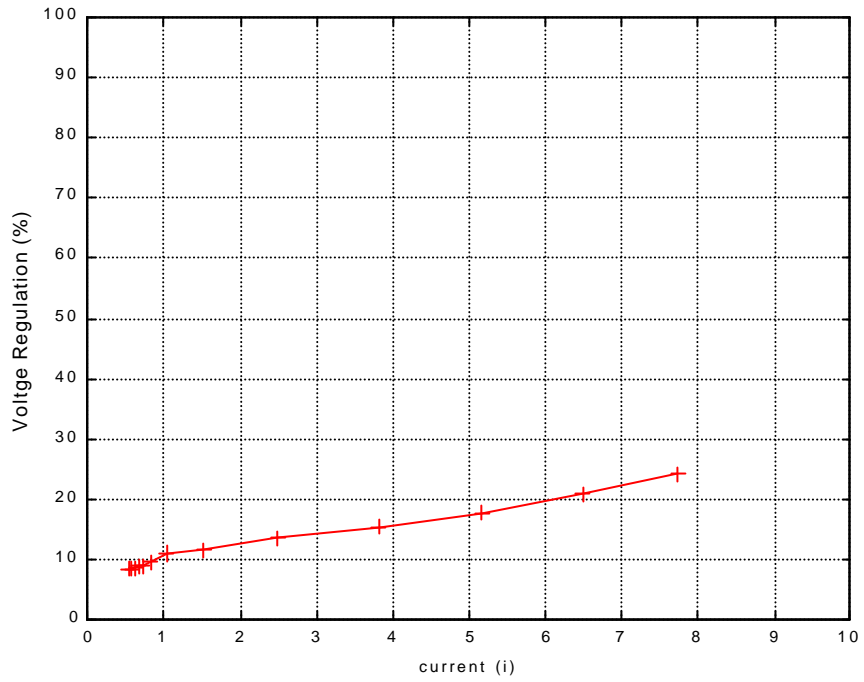


Fig. 4.19 變壓器電壓調整率之實驗結果

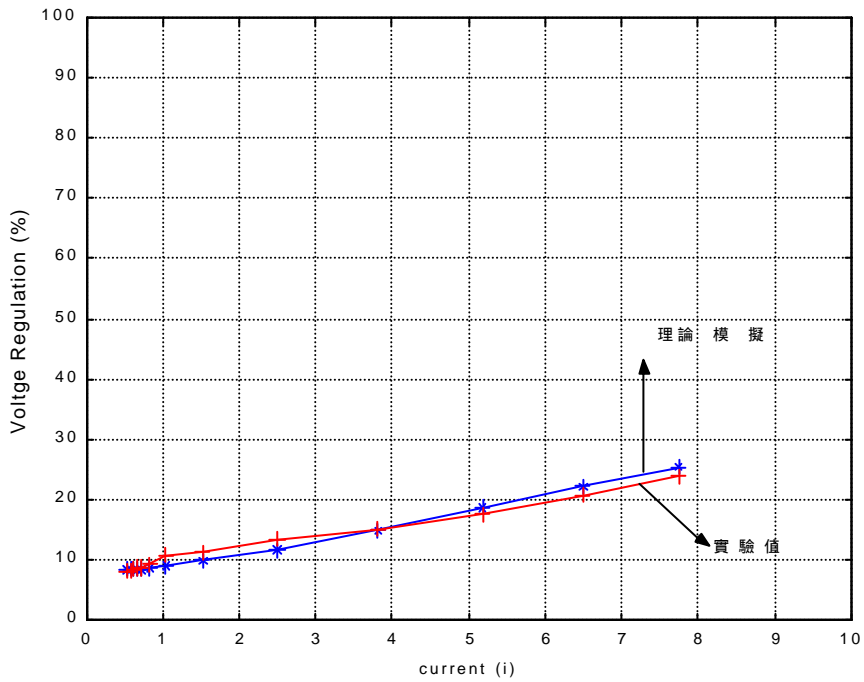


Fig. 4.20 理論模擬與實驗值之比較

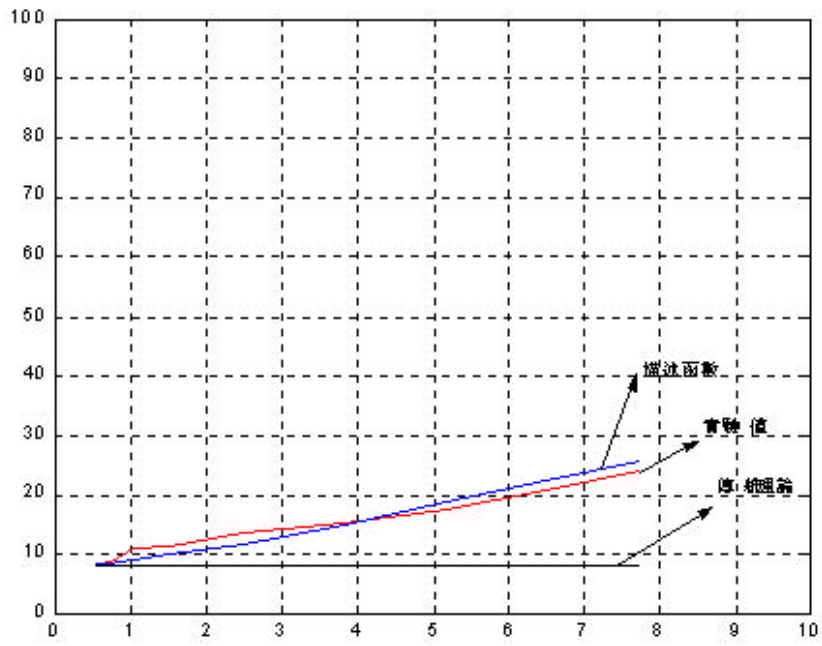


Fig. 4.21 傳統理論與描述函數模擬及實驗值之比較

第五章 結論

由以上分析與模擬得知，當流經電感之電流超過飽和電流 i_{SAT} 時，電感之自電感值會下降，LR 低通濾波器截止角頻率往高頻移動，造成高頻雜訊進入 LR 低通濾波器，使得濾波之效果大打折扣。若流經電感之電流遠小於電感飽和電流，則非線性電感可視為線性電感，描述函數法之波德大小圖會與線性波德大小圖重疊。故可由波德大小圖 3db 角頻率之大小來估計線性自電感值。由於飽和描述函數模擬曲線比線性模擬曲線更接近非線性模擬曲線，故飽和描述函數除了可以說明電感飽和後濾波截止角頻率往高頻移動之現象外，亦可應用於大電流下含有電感濾波電路的設計。

根據電感的飽和特性，可以將其應用在變壓器之電壓調整率之研究，當電流超過飽和電流後，電壓調整率即不斷升高，而未超過飽和電流則維持線性狀態為一定值，從結果得知描述函數所提供之估測值較傳統理論更接近實際變壓器之電壓調整率，此結果對於整個電力輸送系統將提供更準確的估測方法。

總之，本文所提出之電感產生磁滯現象及變壓器電壓調整率的大電流信號模型，並且推導出數學方程式及其解法。然而，描述函數取現之選擇也必須符合系統之架構，當然，必須再描述函數的基本假設都成立的情況下，如此，才能確保描述函數所得之模擬滿足系統之需求，這是應用描述函數時必須注意的地方。

參考文獻

- [1] Rizzoli. V, Masotti. D, Mastri. F, “general purpose analysis of nonlinear circuits containing saturating/hysteretic inductors by the harmonic- balance technique”, magnetics, IEEE Transactions on Volume:313, page(s)2290~2303.
- [2] Fendrich. O. R, “Describing functions and limit cycles”, automatic control, IEEE Transactions on Volume:314, page(s):486~487.
- [3] Clogren. R. D, “H/sub infinite control of nonlinear systems using describing function and simplicial algorithms”, Decision and control, 1992, Proceedings of the 31st IEEE conference on, page(s):957-964 Vo1.1.
- [4] Bowron. P, ”Harmonic characterisation of feedback systems incorporating saturation nonlinearities”, Electronics Letters Volume:2720, page(s):1865~1867.
- [5] Taug. H, ”A design of model following control system for a class of nonlinear descriptor system”, Industrial Electronics, control and Indtrumentation, 1997, IECON 97, 23rd International conference on Volume:01, page(s):295~299 Vo.1.
- [6] Atherton. D. P, “Early developments in nonlinear control”, Decision and control, 1994, Proceedings of the 33rd IEEE conference on Volume:3, page(s):2106~2116 Vo1.3.
- [7] 謝錫棋, “自動控制理論基礎”, 北京理工大學出版社, 民國 81 年 4 月.
- [8] 吳麒, “自動控制原理”, 清華大學出版社, 民國 84 年 2 月.
- [9] 李宜達, “控制系統設計與模擬”, 全華, 1998.
- [10] 薛定宇, “控制系統計算機輔助設計-MATLAB 語言及應用”, 凡異, 1998.
- [11] 陳秋麟, “電機機械”, 東華, 1997.
- [12] 鄭健隆, “變壓器湧入電流之諧波分析與模擬”, 碩士論文, 國立成功大學電機工程研究所, 1989.
- [13] 鄭健隆, “變壓器電磁湧流特性之研究”, 博士論文, 國立成功大學電機工程研究所, 1992.
- [14] E. H. Badawy, “Representation of Transformer Saturation”, Journal Electric Power Systems Research, vol. 6, 1983, pp.301-304.
- [15] L. O. Chua and K. Stromsmoe, “Lumped-Circuit Models for Nonlinear Inductors Exhibiting Hysteresis Loops”, IEEE Trans. Circuit Theory, vol. CT-17, 1970, pp. 564-574.

- [16] 邱天基, 陳國堂, “電機機械”, 全華, 1994.
- [17] 林群超, “自動控制系統設計與 MATLAB 語言”, 全華, 1999.
- [18] 黃啟貞, “變壓器飽和特性之模擬與分析”, 碩士論文, 國立成功大學電機工程研究所, 1988.
- [19] 魏忠必, “變壓器磁滯迴路模式應用於電力系統暫態分析之研究”, 博士論文, 國立成功大學電機工程研究所, 1988.
- [20] H. B. Jonathan, “Modeling the Dynamics of Nonlinear Inductor Circuit”, IEEE Trans. on Magnetics, Vol. 305, page(s)2795~2801, 1994.
- [21] 黃政壽, “描述函數法應用於非線性阻尼與非線性電感之研究”, 碩士論文, 私立逢甲大學自動控制工程研究所, 1999.

附錄

A. 加入激磁電抗之電壓調整率公式推導

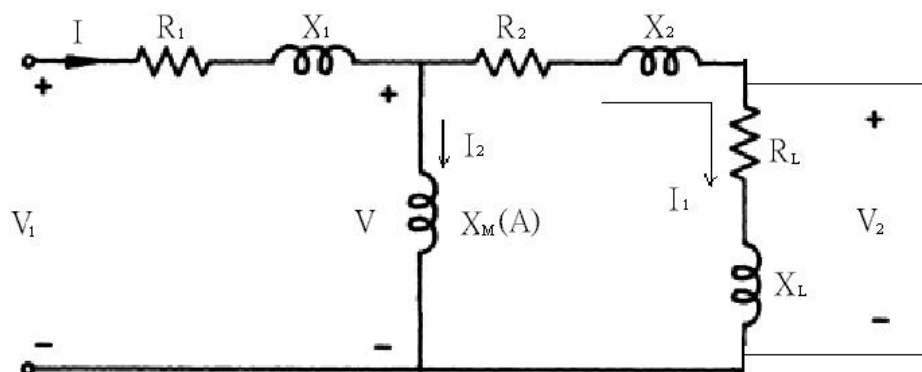


Fig. A.1 變壓器等效電路圖

變壓器之等效電路，如上圖所示，

$$R_1 = \frac{R_{11}}{a^2}$$

$$X_1 = \frac{X_{11}}{a^2}$$

R_{11} ：一次側電阻

X_{11} ：一次側漏電抗

定義：

$$R_{eq} = R_2 + R_L$$

$$X_{eq} = X_2 + X_L$$

則電壓調整率可寫成：

$$V.R. = \frac{V_2 - V_1}{V_2} = 1 - \frac{V_1}{V_2}$$

其中

$$V_2 = V \times \frac{R_L + jX_L}{R_{eq} + jX_{eq}}$$

$$V = V_1 \times \frac{(R_{eq} + jX_{eq}) // (jX_M(A))}{(R_1 + jX_1) + (R_{eq} + jX_{eq}) // (jX_M(A))}$$

則 V_2 可寫成：

$$\begin{aligned}
V_2 &= V_1 \times \frac{(R_{eq} + jX_{eq}) // (jX_M(A))}{(R_1 + jX_1) + (R_{eq} + jX_{eq}) // (jX_M(A))} \times \frac{R_L + jX_L}{R_{eq} + jX_{eq}} \\
&= V_1 \times \frac{\frac{(R_{eq} + jX_{eq}) \cdot (jX_M(A))}{R_{eq} + jX_{eq} + jX_M(A)}}{R_1 + jX_1 + \frac{(R_{eq} + jX_{eq}) \cdot (jX_M(A))}{R_{eq} + jX_{eq} + jX_M(A)}} \times \frac{R_L + jX_L}{R_{eq} + jX_{eq}} \\
&= V_1 \times \frac{(R_{eq} + jX_{eq}) \cdot (jX_M(A))}{(R_1 + jX_1) \cdot (R_{eq} + jX_{eq} + jX_M(A)) + (R_{eq} + jX_{eq}) \cdot (R_{eq} + jX_{eq})} \times \frac{R_L + jX_L}{R_{eq} + jX_{eq}} \\
&= V_1 \times \frac{(-X_L X_M(A)) + j(R_L X_M(A))}{(R_1 R_{eq} - X_1 X_{eq} - X_1 X_M(A) - X_{eq} X_M(A)) + j(R_1 X_{eq} + R_1 X_M(A) + R_{eq} X_1 + R_{eq} X_M(A))} \\
\frac{V_1}{V_2} &= \frac{\sqrt{(R_1 R_{eq} - X_1 X_{eq} - X_1 X_M(A) - X_{eq} X_M(A))^2 + (R_L X_{eq} + R_1 X_M(A) + R_{eq} X_1 + R_{eq} X_M(A))^2}}{\sqrt{(X_L X_M(A))^2 + (R_L X_M(A))^2}} \\
1 - \frac{V_1}{V_2} &= 1 - \frac{\sqrt{(R_1 R_{eq} - X_1 X_{eq} - X_1 X_M(A) - X_{eq} X_M(A))^2 + (R_L X_{eq} + R_1 X_M(A) + R_{eq} X_1 + R_{eq} X_M(A))^2}}{\sqrt{(X_L X_M(A))^2 + (R_L X_M(A))^2}}
\end{aligned}$$

電壓調整率為：

$$V.R. = 1 - \frac{\sqrt{(R_1 R_{eq} - X_1 X_{eq} - X_1 X_M(A) - X_{eq} X_M(A))^2 + (R_L X_{eq} + R_1 X_M(A) + R_{eq} X_1 + R_{eq} X_M(A))^2}}{\sqrt{(X_L X_M(A))^2 + (R_L X_M(A))^2}}$$

從圖中得知

$$I = \frac{V_1}{R_1 + jX_1 + (R_{eq} + jX_{eq}) // (jX_M(A))}$$

$$I_1 = I \times \frac{jX_M(A)}{R_{eq} + jX_{eq} + jX_M(A)}$$

$$I_2 = I \times \frac{R_{eq} + jX_{eq}}{R_{eq} + jX_{eq} + jX_M(A)}$$

則激磁電流為：

$$I_2 = \frac{V_1}{(R_1 + jX_1) + (R_{eq} + jX_{eq}) // [jX_M(A)]} \times \frac{R_{eq} + jX_{eq}}{R_{eq} + jX_{eq} + jX_M(A)}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{V_1}{R_1 + jX_1 + \frac{(R_{eq} + jX_{eq}) \cdot jX_M(A)}{R_{eq} + jX_{eq} + jX_M(A)}} \times \frac{R_{eq} + jX_{eq}}{R_{eq} + jX_{eq} + jX_M(A)} \\
&= \frac{V_1 \cdot [R_{eq} + jX_{eq} + jX_M(A)]}{(R_1 + jX_1)[R_{eq} + jX_{eq} + jX_M(A)] + (R_{eq} + jX_{eq})[jX_M(A)]} \times \frac{R_{eq} + jX_{eq}}{[R_{eq} + jX_{eq} + jX_M(A)]} \\
&= \frac{V_1 \cdot (R_{eq} + jX_{eq})}{(R_1 + jX_1)[R_{eq} + jX_{eq} + jX_M(A)] + (R_{eq} + jX_{eq}) \cdot [jX_M(A)]} \\
&= \frac{\sqrt{(V_1 R_{eq})^2 + (V_1 X_{eq})^2}}{\sqrt{[R_1 R_{eq} - X_1 X_{eq} - X_1 X_M(A) - X_{eq} X_M(A)]^2 + [R_{eq} X_1 + R_1 X_{eq} + R_1 X_M(A) + R_{eq} X_M(A)]^2}} \\
|I_2| &= A
\end{aligned}$$

激磁電抗則為：

$$X_M(A) = \mathbf{w} \cdot N(A)$$

其中

$$\begin{aligned}
N(A) &= \frac{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}}{A} \angle \tan^{-1} \frac{A_1}{B_1} \\
&= \frac{2K}{\mathbf{p}} \left[\sin^{-1} \frac{S}{A} + \frac{S}{A} \sqrt{1 - \left(\frac{S}{A}\right)^2} \right] \angle 0^\circ
\end{aligned}$$

S：飽和電流

A：激磁電流得絕對值

B. 解非線性代數方程之 MATLAB 程式

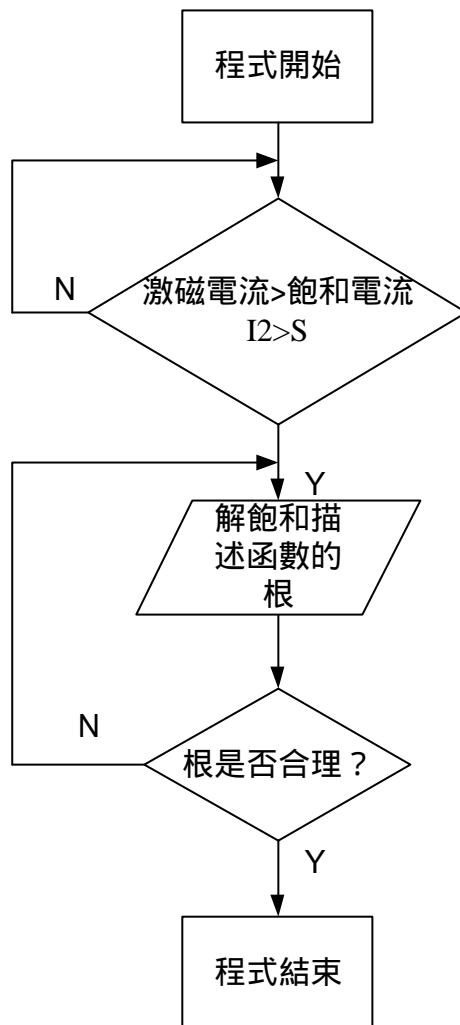


Fig. B.1 程式流程圖

程式內容：

```
clf;clear all;
```

```
global R1 X1 L0 R2 X2 RL XL Req Xeq V1 s w Xe I2
```

```
w=60*2*pi;
```

```
L0=0.745;
```

```
s=0.68;
```

```
R1=13.02;
```

```
X1=7.75;
```

```
R2=13.02;
```

```
X2=7.75;
```

```
RL=400;
```

```
XL=0;
```

```

Req=R2+RL;
Xeq=X2+XL;
V1=50*(2^0.5);
figure(1);
fplot('ftransformer1',[-1000 1000])
hold on;
grid on;
I2=0;
A=0;
true=0;IX1=0;IX2=0;
while (true==0) & ( A<3000)
if A>s
    z=s/A;
    NA=(2*L0/pi)*(asin(z)+z*((1-z^2)^0.5));
else
    NA=L0;
end
XM=w*NA;
Xb=((V1*Req)^2+(V1*Xeq)^2)^0.5;
Xc=R1*Req-X1*Xeq-X1*XM-Xeq*XM;
Xd=R1*Xeq+R1*XM+X1*Req+Req*XM;
Xe=(Xc^2+Xd^2)^0.5;
I2=Xb/Xe;
IX1=I2-A;
    if IX1*IX2<0
        x=A-1;
        true=1;
        if x<0
            true=0;
        end
        break;
    end
IX2=IX1;
A=A+1;

```

```

end
switch true
case 1
for x1=x:0.00001:x+1
A=x1;
if A>s
    z=s/A;
    NA=(2*L0/pi)*(asin(z)+z*((1-z^2)^0.5));
else
    NA=L0;
end
XM=w*NA;
Xb=((V1*Req)^2+(V1*Xeq)^2)^0.5;
Xc=R1*Req-X1*Xeq-X1*XM-Xeq*XM;
Xd=R1*Xeq+R1*XM+X1*Req+Req*XM;
Xe=(Xc^2+Xd^2)^0.5;
I2=Xb/Xe;
IX1=I2-A;
if IX1*IX2<0
    x2=A-0.00001;
    break;
end
IX2=IX1;
end
A=x2;
if A>s
    z=s/A;
    NA=(2*L0/pi)*(asin(z)+z*((1-z^2)^0.5));
else
    NA=L0;
end
XM=w*NA;
Xf=((XL*XM)^2+(RL*XM)^2)^0.5;
VoltageRegularRate=(1-Xf/Xe)*100;

```



```
disp('The saturation current(A)=')
disp(s)
disp('current(A)=')
disp(A)
disp('The regulating rate of voltage for transformer=')
disp(VoltageRegularRate)
otherwise
    disp('No solution !')
end
```