電磁學

電磁感應

- 動電生磁
  - 電流產生磁場
    - 拜歐撒瓦定律(Biot-Savart Law)
    - 安培定律(Ampere‘s Law)
  - 電場改變產生磁場
    - 安培-馬克斯威爾定律(Ampere-Maxwell Law)
- 動磁生電
  - 磁通改變產生感應電場及電動勢
    - 法拉第定律(Faraday’s Law)
- 馬克斯威爾方程式(Maxwell’s Equations)---積分形式

電磁學

電流產生磁場

拜歐撒瓦定律(Biot-Savart Law)

安培定律(Ampere‘s Law)

拜歐撒瓦定律(Biot-Savart Law)

由實驗可以得到 $d\mathbf{B} = \frac{m_0}{4p}\frac{id\mathbf{s}\times\mathbf{r}}{r^3}$ 或 $dB = \frac{m_0}{4p}\frac{ids\sin q}{r^2}$

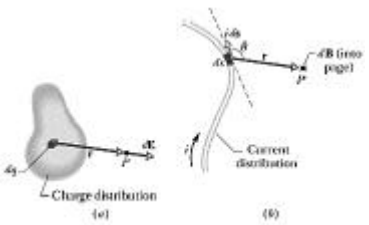
$\mu_0=4\pi\times10^{-7}$ T·m/A≈1.26×10^{-6} T·m/A permeability constant 磁導率

注意：$d\mathbf{B}\perp d\mathbf{s}$, $\mathbf{r}$

和庫侖定律的形式比較

$dE = \frac{1}{4pe_0}\frac{dq}{r^2}$ $d\mathbf{E} = \frac{1}{4pe_0}\frac{dq}{r^3}\mathbf{r}$

均和距離平方成反比。



電磁學

長導線電流所造成之磁場

$$\boxed{B=\frac{m_0 I}{2pa}}$$

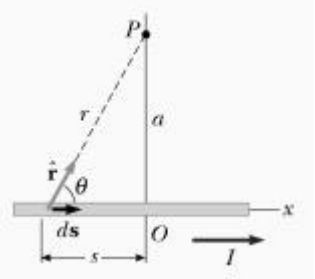
$$dB=\frac{m_0}{4p}\frac{Ids\sin q}{r^2}$$

$$B=2\int_0^\infty dB=\frac{m_0 I}{2p}\int_0^\infty\frac{\sin q ds}{r^2}$$

$$r=\sqrt{s^2+a^2},\qquad \sin q=\sin(p-q)=\frac{a}{\sqrt{s^2+a^2}}$$

$$B=2\int_0^\infty dB=\frac{m_0 I}{2p}\int_0^\infty\frac{ads}{\left(s^2+a^2\right)^{3/2}}$$

$$=\frac{m_0 I}{2pa}\left[\frac{s}{\left(s^2+a^2\right)^{1/2}}\right]_0^\infty=\frac{m_0 I}{2pa}$$



電磁學

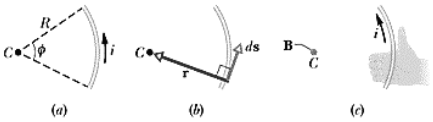
積分的計算：

$$s=a\tan q,\qquad ds=ad q/\cos^2 q$$

$$\left(s^2+a^2\right)^{3/2}=a^3\left(1+\tan^2 q\right)^{3/2}=a^3/\cos^3 q$$

$$\int_0^\infty\frac{ads}{\left(s^2+a^2\right)^{3/2}}=\int_0^{p/2}\frac{\cos q dq}{a}=\frac{1}{a}$$

部分圓弧導線中電流所造成之磁場

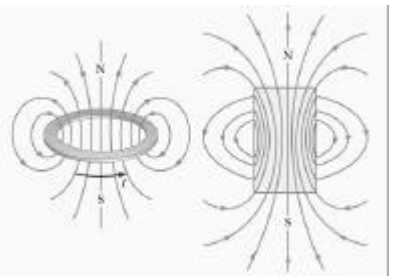


$$dB=\frac{m_0}{4p}\frac{ids}{R^2}=\frac{m_0}{4p}\frac{iRd f}{R^2}=\frac{m_0}{4p}\frac{id f}{R}$$

$$B=\int_0^f\frac{m_0}{4p}\frac{id f}{R}=\frac{m_0}{4p}\frac{i f}{R}$$

電磁學

帶電流線圈(coil)造成之磁偶極磁場分布
帶電流線圈和磁鐵棒類似，除了在磁場中會受到力矩外，本身也會產生一磁場分布。可以和電偶極的情形比較，非常類似。在距離很遠時，磁場強度和距離之3次方成反比（這是dipole field的特性）。

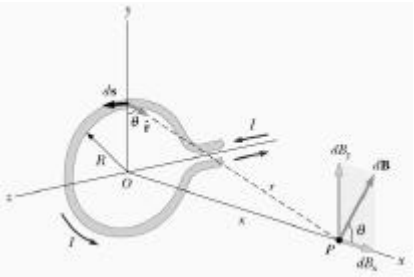


這裡我們只計算線圈軸上磁場的強度。
由Biot-Savart Law**知**

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I d\mathbf{s}\times\mathbf{r}}{r^3}$$

$d\mathbf{B}\perp d\mathbf{s}, \mathbf{r}$

$$d\mathbf{B} = d\mathbf{B}_\perp + d\mathbf{B}_x$$



$d\mathbf{B}_\perp$**由於對稱性完全抵消掉，只剩**x**方向的分量。**

電磁學

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I ds \sin 90^\circ}{r^2} \qquad dB = dB\cos\theta = \frac{\mu_0 I\cos\theta ds}{4\pi r^2}$$

$$r = \sqrt{R^2 + x^2} \qquad \cos\theta = \frac{R}{r} = \frac{R}{\sqrt{R^2+x^2}}$$

$$dB_x = \frac{\mu_0 IRds}{4\pi\left(R^2+x^2\right)^{3/2}}$$

$$B = \int dB_x = \frac{\mu_0 IR}{4\pi\left(R^2+x^2\right)^{3/2}}\int ds = \frac{\mu_0 IR}{4\pi\left(R^2+x^2\right)^{3/2}}\cdot 2\pi R$$

$$B = \frac{\mu_0 IR^2}{2\left(R^2+x^2\right)^{3/2}}$$

令$\mu = IA = I\pi R^2$

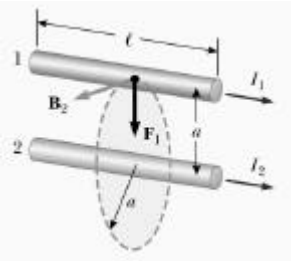
當$z >> R$**時，**

$$\mathbf{B}(z) = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{\mu}{x^3} \qquad \propto x^{-3}$$

電磁學

平行電流間之作用力

考慮兩平行電流距離a
I_2在導線1處產生之磁場大小為 $B_2 = \dfrac{m_0 I_2}{2pa}$ 方向如圖



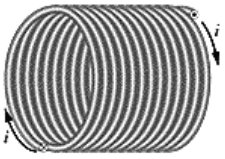
導線1所受到的力為 $F_1 = I_1 \ell B_1 \sin 90° = \dfrac{m_0 \ell I_1 I_2}{2pa}$

方向朝向導線2

F_2可獲得相同之結果，方向則朝導線1。
上面是兩電流同向的結果，導線互相吸引。
如果電流方向相反則導線互相排斥。

例題

考慮一彈性導電線圈，通一直流電流後其大小尺寸如何改變？



電磁學

安培定律(Ampere's Law)

在考慮電場時，我們用高斯定律($e_0\Phi = e_0 \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = q_{\text{enc}}$)可以簡化很多計算，特別是具有對稱性的電荷分布。對於磁場，我們是不是可能得到類似的定律？

想一想 $\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} = ?$ $\mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} = d\Phi$稱為磁通量(magnetic flux)。

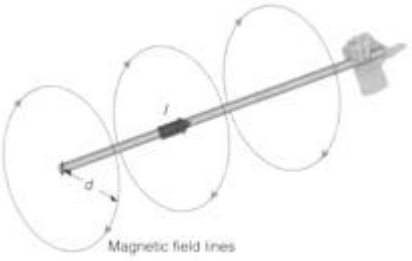
答案是0！為什麼呢？因為目前我們不知道有單獨存在的磁極(magnetic monopole)。
這招不管用，我們試一試別的，從長導線電流造成的磁場分布考慮起。

$$B = \frac{m_0 I}{2pd}$$

$2\pi d$剛好是圓周長
上式可寫為

$$\oint_{cir} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \oint_{cir} B ds = m_0 I$$

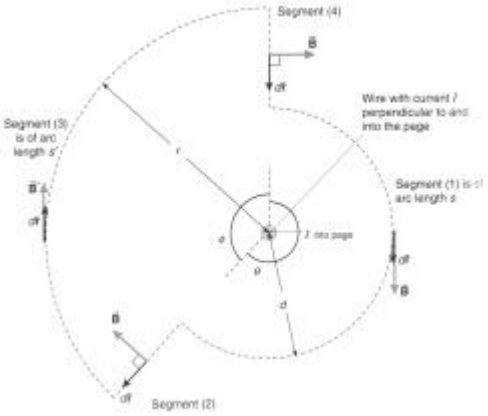
這式子對任一半徑的圓均適用。



電磁學

對於圓上的任一角度弧長，此線積分僅與角度有關。即

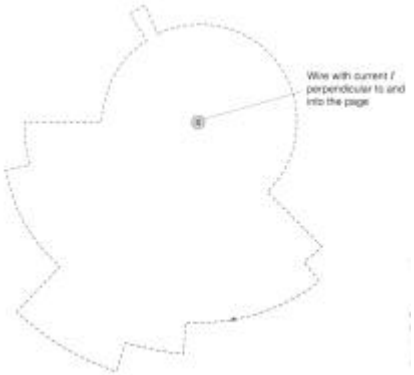
$$\int_0^f \mathbf{B}\cdot d\mathbf{s} = \frac{m_0 I}{2pr}\int_0^f ds = \frac{m_0 I}{2pr} rf = \frac{m_0 I}{2p} f$$



電磁學

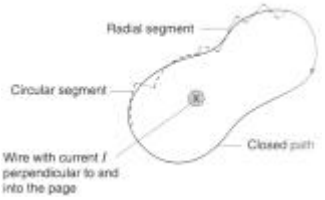
若一封閉路徑由不同半徑的圓弧組成（如下圖），中間以和半徑同方向的線段連結，則沿此路徑磁場之線積分結果必然也是$\mu_0 I$**，即** $\oint_{close} \mathbf{B}\cdot d\mathbf{s} = m_0 I$

沿半徑方向路徑，$\mathbf{B}\perp d\mathbf{s}$ **(r)，**$\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}=0$



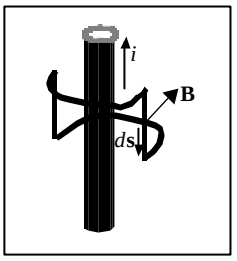
電磁學

包含該電流之任一形狀封閉路徑，均可以看成由無限多不同半徑圓弧（以該電流為圓心）及半徑方向線段組成，上式依然成立。注意：積分方向由右手定則決定。

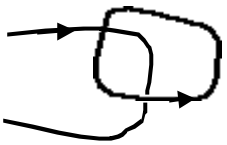


如果該封閉路徑不在同一平面上，只要該路徑包含電流，上式也成立。

連結不同平面（和電流垂直）的和電流同向路徑部分$\mathbf{B}\perp ds$，對積分沒有貢獻。

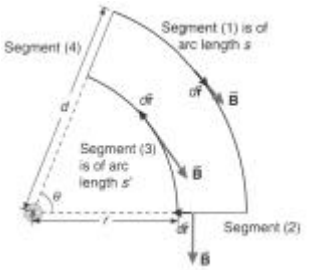


上面結果還可以推到任一電流分布，不一定要直線，及任一封閉區線（但只繞電流一次）。

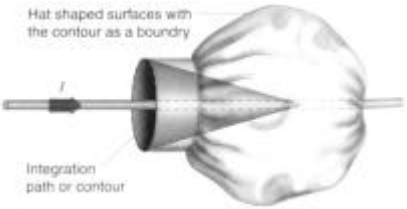


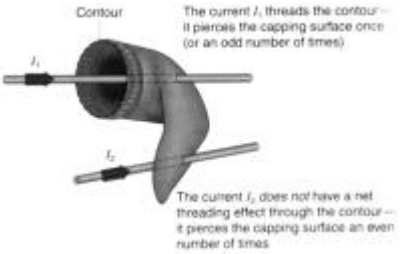
電磁學

假如電流沒有穿過該封閉路徑，則環場積分為0。



在三度空間中電流是否穿過一封閉面有時不是那麼容易判斷。我們可以用電流是否穿過以此封閉面為邊界的簡單連續面來判斷。如圖。

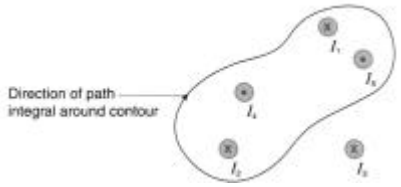




電磁學

由上面討論，我們可以寫下安培定律：$\oint_{close} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = m_0 I_{\text{enc}}$

沿空間中之封閉迴圈（安培環，Amperian loop）計算磁場沿迴圈方向的線積分，所得環場積和此封閉迴圈所包含之總電流成正比。電流方向由右手定則決定。



電場的安培定律呢？對於*靜電場*分布，E**·*d*s即電位的變化，對於任何封閉曲線，積分為0！！即

$$\oint_{close} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = 0$$

電磁學

安培定律的應用

和高斯定律類似，安培定律可以用來計算具有對稱性電流分布所造成之磁場。

有用安培環路徑之選取標準：

(a) **B**·*d*s均相同；

(b) B·*d*s均為零。

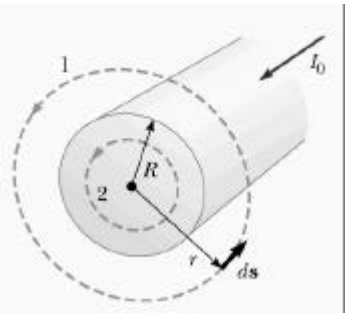
帶電流長導線內外之磁場

如右圖電流在導線中均勻分布。當$r>R$時，安培環所包含之電流均為I_0，故

$$\oint_{\text{path1}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = m_0 I_0$$

$$B \cdot 2pr = m_0 I_0$$

$$B = \frac{m_0 I_0}{2pr}$$



和用Biot-Savart Law所得相同。

電磁學

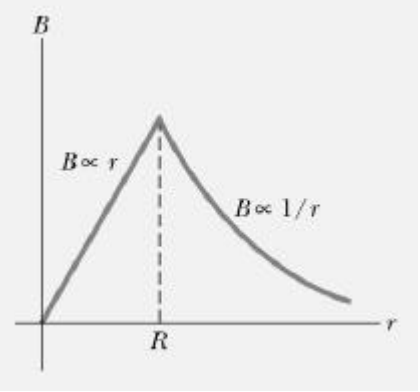
當$r<R$時，安培環所包含之電流和所包含之面積成正比。

$$\oint_{\text{path2}} \mathbf{B}\cdot d\mathbf{s} = m_0 I(r) = m_0 I_0 \frac{r^2}{R^2}$$

$$B\cdot 2pr = m_0 I_0 \frac{r^2}{R^2}$$

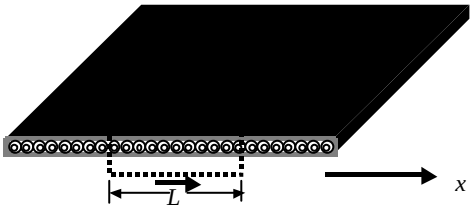
$$B = m_0 I_0 \frac{r}{2pR^2}$$

和r成正比。



電磁學

二維的面電流分布



由對稱性考量，在電流分布上方磁場方向為-x，下方為x。
由安培定律

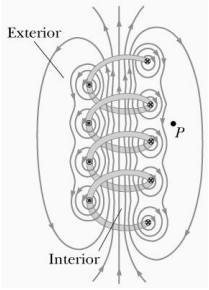
$$B\cdot 2L = m_0 j_s L$$

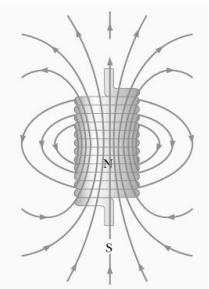
$$B = \frac{m_0 j_s}{2}$$

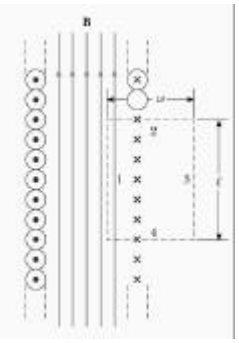
所得結果和離面電流距離無關。（和面電荷分布類似）

電磁學

螺線管(Solenoids)**之磁場分布**







繞線的密度為*n* **匝/米** (turns/m)

2，3**及**4**段之**B·*d*s**均為**0。**故**

$$\oint_{1234} \mathbf{B}\cdot d\mathbf{s} = \int_1 \mathbf{B}\cdot d\mathbf{s} = B\ell = m_0 I_{\text{enc}} = m_0 I n \ell$$

$$\boxed{B = m_0 n I}$$

注意：和螺線管的半徑無關。另外這結果和兩平行但電流方向相反之二維面電流分布所造成之磁場相同。

電磁學

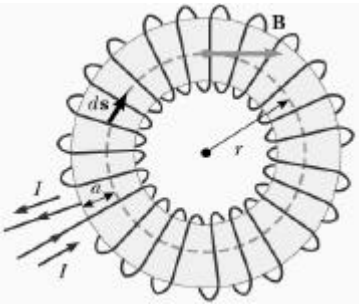
環形螺線管(Toroid)**之磁場分布**

假如將螺線管繞成環形，磁力線將都包在線圈（有*N***匝）之中。**

$$\oint \mathbf{B}\cdot d\mathbf{s} = B\cdot 2pr = m_0 NI$$

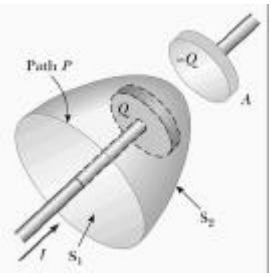
$$\boxed{B = \frac{m_0 NI}{2pr}}$$

注意*r***是距大環圓心的距離，結果和螺管之半徑無關。**

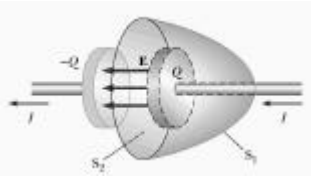


電場改變產生磁場

安培-馬克斯威爾定律(Ampere-Maxwell Law)



當電流迴路中包含一充電中的電容時，安培定律會有問題。考慮當以安培環為邊界的封閉面通過電容的電極間的情形，此時並無真正的電流通過，僅有電場（或電通量）的變化。因此馬克斯威爾認為安培定律中的電流必須加上電場改變相關之修正項，稱做位移電流(displacement current)**。**



$$\Phi_E = EA = \frac{Q}{e_0}$$

$$I_d = \frac{dQ}{dt} = e_0 \frac{d\Phi_E}{dt}$$

$$\boxed{\oint \mathbf{B}\cdot d\mathbf{s} = m_0(I + I_d) = m_0 I + m_0 e_0 \frac{d\Phi_E}{dt}}$$

例題

A sinusoidally varying voltage is applied across an 8.00 μF capacitor. The frequency of the voltage is 3.00 kHz, and the voltage amplitude is 30.0 V. Find the displacement current between the plates of the capacitor.

$$I_d = \frac{dQ}{dt} = \frac{d}{dt}(C\Delta V) = C\frac{d}{dt}\Delta V$$

$$= (8.00\times10^{-6}\ \text{F})\frac{d}{dt}[(30.0\ \text{V})\sin(2\pi\times3\times10^{3}\ t)]$$

$$= (4.52\ \text{A})\cos(1.88\times10^{4}\ t)$$

目前我們有的電磁學方程式

$$\oint_S \mathbf{E}\cdot d\mathbf{A} = \frac{Q}{e_0}$$

$$\oint_S \mathbf{B}\cdot d\mathbf{A} = 0$$

$$\oint \mathbf{B}\cdot d\mathbf{s} = m_0 I + e_0 m_0 \frac{d\Phi_E}{dt}$$

$$\oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{s} = ??$$

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v}\times\mathbf{B})$$

是不是和 $\frac{d\Phi_B}{dt}$ **有關？**