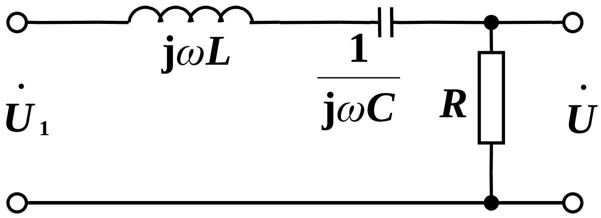
# §11—5 $LC$ 电路的频率响应 谐振

## §11.5.1 $RLC$ 电路的频率响应

1．网络函数（电压转移函数）

对下图所示电路




$$A_u=\frac{\dot U_2}{\dot U_1}=\frac{R}{R+\mathrm{j}\omega L+\dfrac{1}{\mathrm{j}\omega C}}=\frac{\mathrm{j}\omega RC}{1-\omega^2 LC+\mathrm{j}\omega RC} \qquad (1)$$

2．幅频响应：

$$\left|A_u\right|=\frac{\omega RC}{\sqrt{(1-\omega^2 LC)^2+(\omega RC)^2}} \qquad (2)$$

3．相频特性：

$$\varphi=\frac{\pi}{2}-\mathrm{Arctg}\frac{\omega RC}{1-\omega^2 LC} \qquad (3)$$

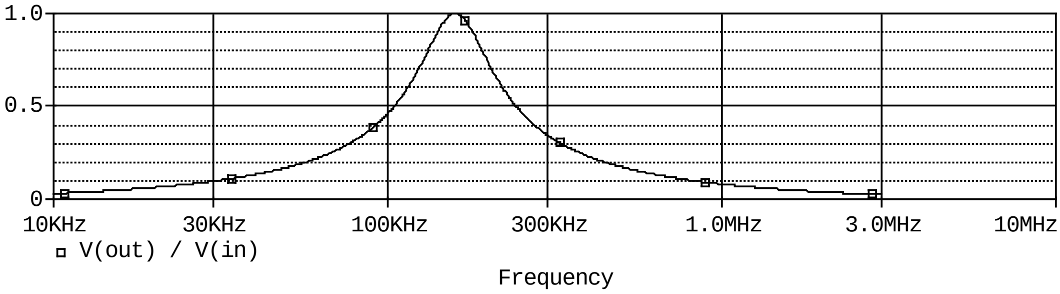
4．频率特性曲线：

由（2）式知，当$1-\omega^2 LC=0$，即

$$\omega=\omega_0=\frac{1}{\sqrt{LC}} \qquad (4)$$

时，$\left|A_u\right|$达到最大值，且$\left|A_u\right|_{\max}=1$，$U_2=U_1$。当$\omega$大于或小于$\omega_0$时，$\left|A_u\right|$下降，小于 1，且随着$\omega\to\infty$或$\omega\to 0$时，$\left|A_u\right|\to 0$。故，称$\omega_0$为中心频率。

幅频特性曲线如下图所示。




可见，这一电路表现出带通（band　pass）的性质。

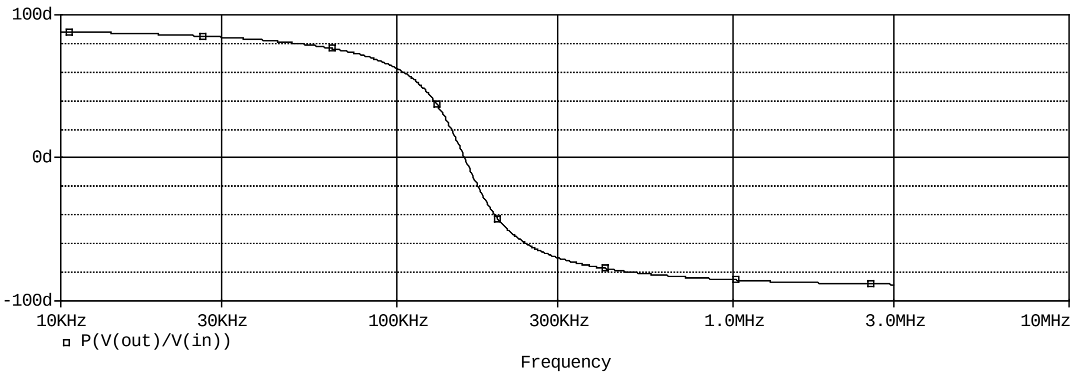
由（3）式可知：

当$\omega=\omega_0$时，$\varphi=0$，$\dot{U}_2$与$\dot{U}_1$同相；

当$\omega\to 0$时，$\varphi\to 90^{\circ}$，$\dot{U}_2$超前$\dot{U}_1\ \dfrac{\pi}{2}$；

当$\omega\to\infty$时，$\varphi\to$ -$90^{\circ}$，$\dot{U}_2$滞后$\dot{U}_1$ -$\dfrac{\pi}{2}$。

相频特性曲线如下图所示。




5．通频带 BW：

定义　　　　　　$BW=\omega_2-\omega_1$

为通频带。式中$\omega_1$、$\omega_2$分别称为上半功率频率和下半功率频率，当$\omega=\omega_1$和$\omega=\omega_2$时，$|A_u|$为其最大值的$\dfrac{1}{\sqrt{2}}$即 70.7%，$\omega_0>\omega_1$，$\omega_0<\omega_2$。

$\omega_1$、$\omega_2$的计算。根据通频带的定义和（2）式、（4）式有

$$\frac{\omega RC}{\sqrt{(1-\omega^2LC)^2+(\omega RC)^2}}=\frac{R}{\sqrt{R^2+(\omega L-\dfrac{1}{\omega C})^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\omega L - \frac{1}{\omega C} = \pm R\,, \quad \omega^2 \mp \frac{R}{L}\omega - \frac{1}{LC} = 0\,, \quad \omega^2 \mp \frac{R}{L}\omega - \omega_0^2 = 0$$

解得
$$\omega = \pm \frac{R}{2L} \pm \sqrt{(\frac{R}{2L})^2 + \omega_0^2}$$

由于$\omega > 0$，故

$$\omega_1 = \frac{R}{2L} + \sqrt{(\frac{R}{2L})^2 + \omega_0^2}\,, \quad \omega_2 = -\frac{R}{2L} + \sqrt{(\frac{R}{2L})^2 + \omega_0^2}$$

$$\mathrm{BW} = \frac{R}{L}$$

6．品质因数：

中心频率$\omega_0$对通频带的比值称为品质因数，记为$Q$，即

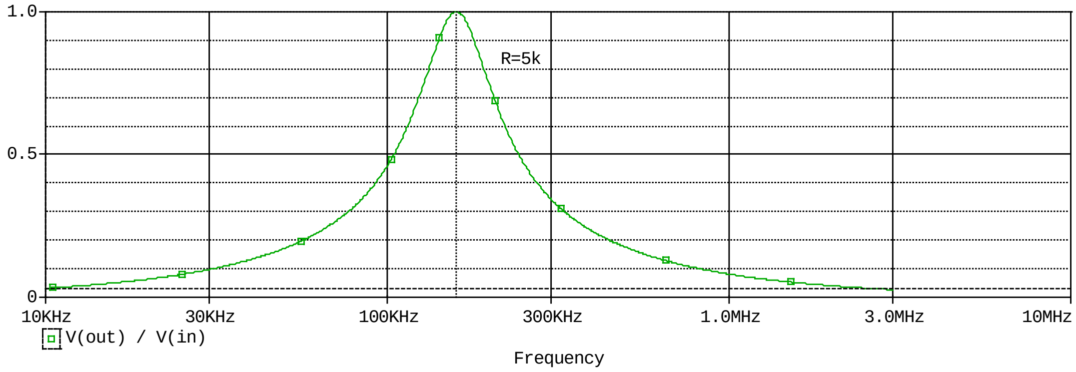
$$Q = \frac{\omega_0}{\omega_2 - \omega_1} = \frac{\omega_0 L}{R}$$

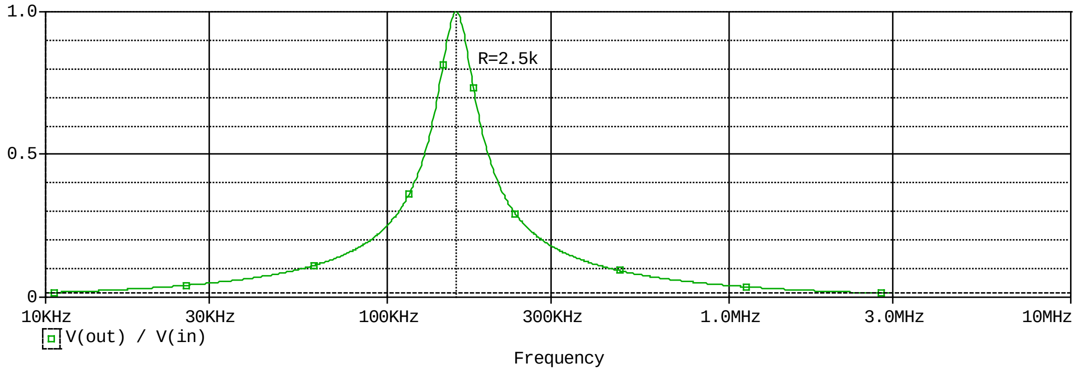
用来衡量幅频特性曲线的陡峭程度，即选频特性的好坏。

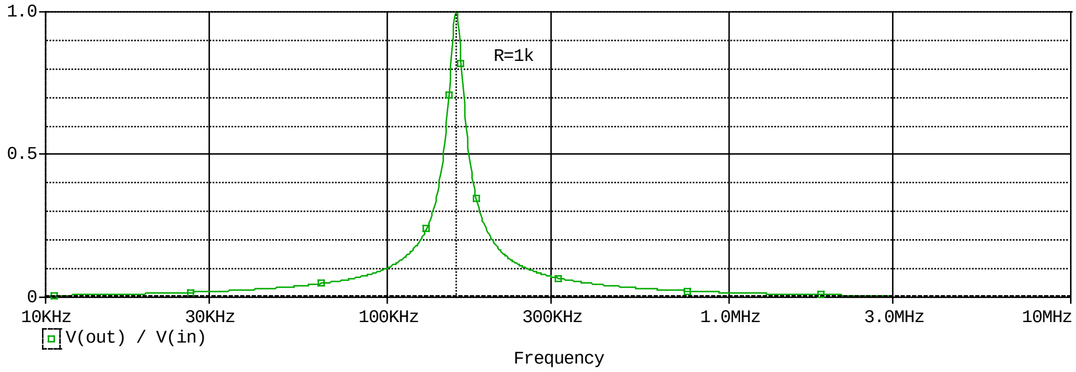
由于$\omega_0 L = \dfrac{1}{\omega_0 C}$，则有：

$$Q = \frac{\omega_0}{\omega_2 - \omega_1} = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{\omega_0 RC}$$

由上式可见，当$\omega_0$和$L$给定时，$R$越小，$Q$越大，BW 越小，通频带越窄，幅频特性曲线越陡峭，顶部越尖锐。选频特性越好。

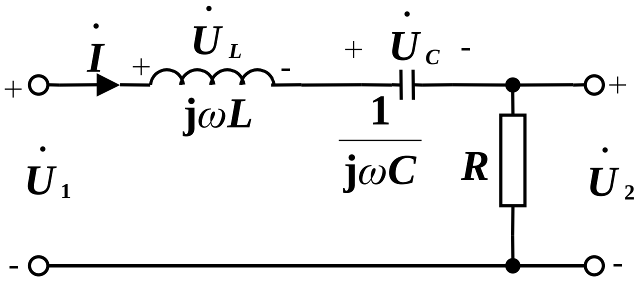





# §11.5.2 谐　振

当$\omega=\omega_0$时，即外施激励电源的频率等于电路的中心频率（又称固有频率）$\omega_0$时，称电路发生谐振。此时，电路有以下特点：




1．RLC 串联电路的输入阻抗：

$$Z=R+j\omega L-j\frac{1}{\omega C}=R+j(\omega L-\frac{1}{\omega C})$$

当$\omega=\omega_0=\dfrac{1}{\sqrt{LC}}$时

$$\omega_0 L=\frac{1}{\omega_0 C}, \quad Z=R$$

即阻抗的电抗分量为 0，阻抗模最小且为$R$，阻抗角$\varphi_Z=0$。

2．当$U_1$一定时，电路中的电流$I=\dfrac{U_1}{R}$最大，且$\dot{U}_1$与$\dot{I}$同相位。

将电路的上述工作状态称作谐振。$\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$ 称为谐振频率。

3．谐振时，$U_R = U_2 = U_1$，且为最大。

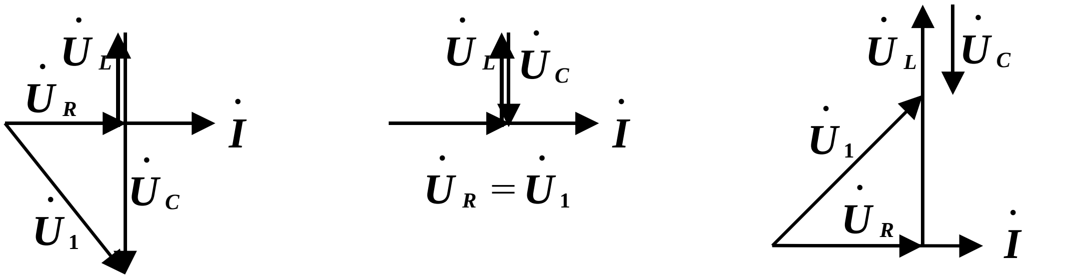
$$U_C = I\frac{1}{\omega_0 C} = \frac{U_1}{R} \bullet \frac{1}{\omega_0 C} = U_1 \frac{\omega_0 L}{R} = QU_1$$

$$U_L = I\omega_0 L = \frac{U_1}{R} \bullet \omega_0 L = U_1 \frac{\omega_0 L}{R} = QU_1$$

即
$$U_C = U_L = QU_1$$

显然，$Q$ 越大，$U_C$、$U_L$ 越高。

4．相量图：谐振的过程也可用相量图加以说明。

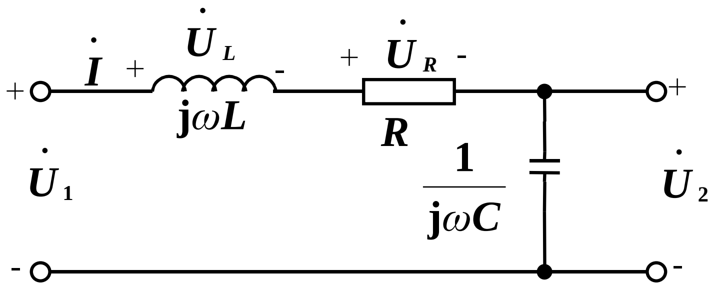



$\omega < \omega_0$ $\quad$ $\omega = \omega_0$ $\quad$ $\omega > \omega_0$

$Z_L < Z_C, U_L < U_C$ $\quad$ $Z_L = Z_C, U_L = U_C$ $\quad$ $Z_L > Z_C, U_L > U_C$

# §11.5.3*RLC* 串联电路的频率响应

近如下图所示，输出取自电容。




1．电压转移函数：

$$A_u = \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} = \frac{\dfrac{1}{\mathrm{j}\omega L}}{R + \mathrm{j}\omega L + \dfrac{1}{\mathrm{j}\omega C}} = \frac{1}{1 - \omega^2 LC + \mathrm{j}\omega RC} \qquad (1)$$

2．幅频特性与相频特性：

$$\left|A_u\right| = \frac{1}{\sqrt{(1-\omega^2 LC)^2 + (\omega RC)^2}} \qquad (2)$$

$$\varphi = -\mathrm{Arctg}\frac{\omega RC}{1-\omega^2 LC} \qquad (3)$$

3．$\left|A_u\right|$的最大值及其条件：

求$\frac{d\left|A_u\right|}{d\omega}$，并令其为 0，得$\left|A_u\right|$取最大值的频率$\omega_m$为：

$$\omega_m = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{1}{2}\left(\frac{R}{L}\right)^2} \qquad (4)$$

且

$$\left|A_u\right|_{\max} = \frac{1}{\sqrt{\frac{R^2 C}{L}\left(1-\frac{R^2 C}{4L}\right)}} \qquad (5)$$

由于

$$Q = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{\omega_0 RC} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$$

由（2）式可得$\omega = \omega_0$时

$$\left|A_u\right|_0 = \frac{1}{\omega_0 RC} = Q \qquad (6)$$

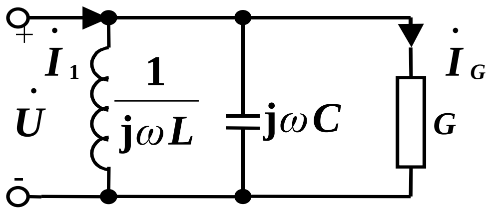
由（5）式得

$$\left|A_u\right|_{\max} = \frac{Q}{\sqrt{1-(1/2Q)^2}} \qquad (7)$$

由（6)、(7）式可知，电路谐振时，电容电压为输入电压的$Q$倍。在高$Q$值电路中，电容电压取最大时的频率$\omega_m$接近谐振频率$\omega_0$，而电容电压的最大值接$Q\dot{U}_1$

## §11.5.4 *GLC* 并联带通电路

*GLC* 并联电路如下图所示。若输入为正弦正弦电流$\dot{I}_1$，输出为电导电流$\dot{I}_G$，则电流转移函数为




$$A_i=\frac{\dot{I}_G}{\dot{I}_1}=\frac{G\dot{U}}{\dot{I}_1}=GZ(j\omega)=\frac{G}{G+j\omega C+\dfrac{1}{j\omega L}} \qquad (1)$$

$$|A_i|=\frac{G}{\sqrt{G^2+(\omega C-\dfrac{1}{\omega L})^2}} \qquad (2)$$

可见（1)、(2）两式的形式与 RLC 串联电路的电压转移函数完全相同，因此，GLC 并联电路也具有带通的性质。而且当

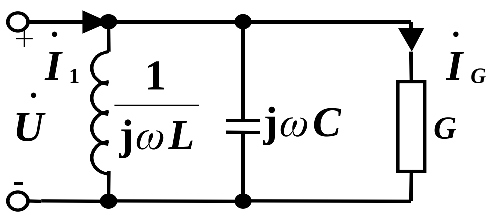
$$\omega=\omega_0=\frac{1}{\sqrt{LC}}$$

时，$|A_i|$取最大值，此时

$$\dot{I}_G=\dot{I}_1,\ \ Q=\frac{\omega_0 C}{G}=\frac{1}{\omega_0 LG},\ \ \mathrm{BW}=\frac{G}{C}$$

# §11.5.5 例题讲解

[例 1] $10^6$Hz，0.1A 电流源施加于 *RLC* 并联谐振电路，谐振频率为 $10^6$Hz，已知 *R*=25kΩ，*C*=200pF，求 *L* 以及谐振时电容及电感的电流。




[例 2]图（a）所示电路为晶体管调谐放大器，图（b）为相量模型虚线框内为晶体管等效电路部分，

其中 $y_{11}$、$y_{12}$、$y_{21}$、$y_{22}$ 为晶体管等效参数。试求电压转移函数 $A_u(\mathrm{j}\omega)=\dfrac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1}$。

若要求电路的通频带中心频率 $f_0=10\mathrm{MHz}$，通频带为 100kHz，$A_u(\mathrm{j}\omega_0)=-50$。已知晶体

管的参数为

$$y_{11}=(2+j0.5)\times10^{-3},\ \ y_{12}=-(1+j5)\times10^{-5}$$

$$y_{21}=g_m=21\times10^{-3},\ \ y_{22}=(2+j4)\times10^{-5}$$

单位为 S。试求所需的 *R*、*L*、*C* 的值。

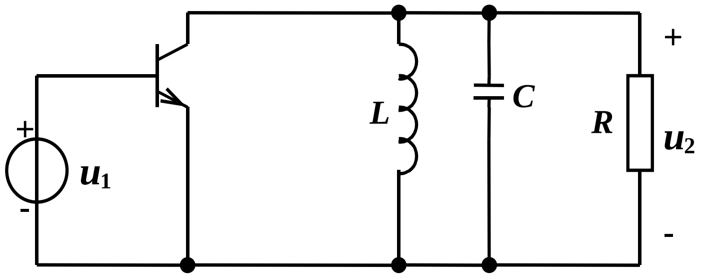
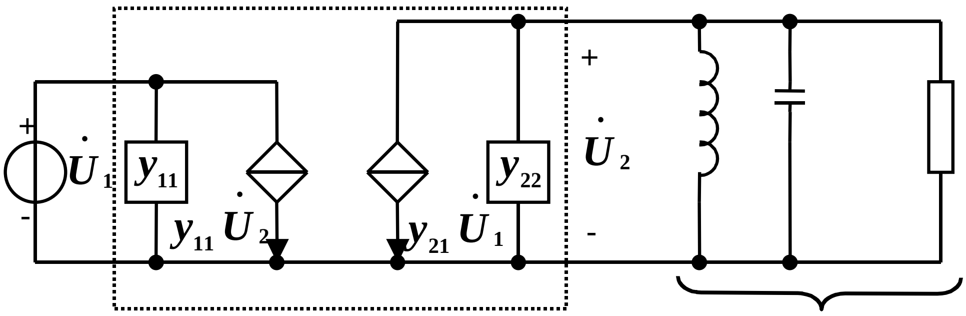



图 (a)




$Y_L$

图 b

[*例 1 求解*]

1．求谐振时的电感 L：由 $\omega_0=1\big/\sqrt{LC}$ 得

$$L=\frac{1}{\omega_0^2C}=\frac{1}{(2\pi\times10^6)^2\times200\times10^{-12}}=127\times10^{-6}=127\mu\mathrm{H}$$

2．求谐振时电容和电感的电流：

由 KCL 和 VAR 可得：

$$\dot{I}_1=\dot{I}_R+\dot{I}_C+\dot{I}_L=\frac{\dot{U}}{R}+j\omega_0C\dot{U}+\frac{1}{j\omega_0L}\dot{U}$$

谐振时有：

$$\omega_0C=\frac{1}{\omega_0L},\qquad Q=\frac{\omega_0C}{G}=\omega_0RC$$

所以

$$\dot{I}_1=\frac{\dot{U}}{R}+j\omega_0 C\dot{U}+\frac{1}{j\omega_0 L}\dot{U}=\frac{\dot{U}}{R}$$

$$\dot{I}_C=j\omega_0 C\dot{U}=j\omega_0 CR\dot{I}_1=jQ\dot{I}_1,\quad \dot{I}_L=-j\frac{1}{\omega_0 L}\dot{U}=-j\omega_0 CR\dot{I}_1=-jQ\dot{I}_1$$

又

$$\dot{I}_1=0.1\mathrm{A},\quad Q=\omega_0 RC=2\pi\times10^6\times25\times10^3\times100\times10^{-12}=31.5$$

故

$$\dot{I}_C=j31.5\times0.1=j3.15A,\quad \dot{I}_L=-j31.5\times0.1=-j3.15A$$

即谐振时电容和电感的电流大小均为 3.15A，且为电流源电流的$Q$倍，但相位相反，从而在电容和电感回路中形成环流，电源只供应电阻的电流。

[*例 2 求解*]

1．求$A_u(j\omega)$：

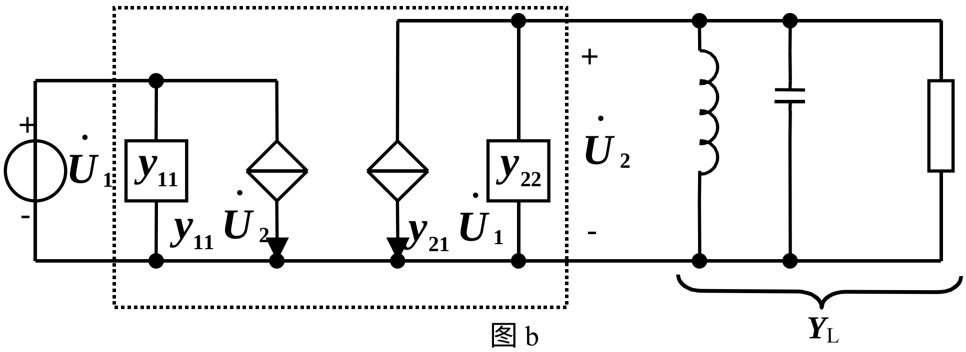


图 b

由电路图可见

$$\dot{U}_2=-y_{21}\dot{U}_1\frac{1}{(y_{22}+Y_L)}$$

则

$$A_u(j\omega)=\frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1}=-\frac{y_{21}}{y_{22}+Y_L}=-\frac{g_m}{y_{22}+G+j\omega C+1/(j\omega L)}$$

设$y_{22}=G_{22}+jB_{22}$，则上式可写为

$$A_u(j\omega)=-\frac{g_m}{G_{22}+G+j(\omega C+B_{22}-1/\omega L)}=-\frac{g_m}{G'+j(\omega C'-1/\omega L')}$$

式中：$G'=G_{22}+G$，$C'=C+B_{22}/\omega$，$L'=L$

2．求谐振时的 R、L、C：

当电路谐振时：，$A_u(j\omega_0)=-50$，即 $A_u(j\omega)$ 分子的虚部为 0，所以

$$A_u(j\omega_0)=-\frac{g_m}{G_{22}+G}=-50$$

代入已知量得

$$-\frac{21\times10^{-3}}{2\times10^{-5}+G}=-50$$

解得：$G=4\times10^{-4}\mathrm{S}$，$R=1/G=2.5\mathrm{k}\Omega$

由于 $\mathrm{BW}=\frac{G}{C}$

所以，当电路谐振时有

$$\mathrm{BW}=\frac{G'}{C'}=\frac{G_{22}+G}{C+B_{22}/\omega_0}$$

将个已知量代入上式可得

$$2\pi\times10^5=\frac{4\times10^{-4}+2\times10^{-5}}{C+0.64\times10^{-12}}$$

解得 $C=669\mathrm{pF}$

由于谐振频率 $\omega_0^2=\frac{1}{CL}$

故

$$L=L'=\frac{1}{\omega_0^2 C'}=\frac{1}{\omega_0^2(C+B_{22}/\omega_0)}$$

解得 $L=0.378\mu\mathrm{H}$