

DC-DC变换器在恒功率负载下的能控性

徐志宇, 许维胜, 余有灵, 吴启迪

(同济大学 电子与信息工程学院, 上海 201804)

摘要: 带有恒功率负载的DC-DC变换器是切换非线性系统. 以Boost变换器为例, 本文建立了其切换系统模型; 它包括三个模态. 模态I, II, III分别对应于开关器件导通、关断、电感电流断续时的电路拓扑. 因为电容电压是非负的, 所以本文对平面拓扑学的最新结果加以修正, 导出了半平面仿射非线性系统全局能控的充分必要条件——判别函数在任意非零控制曲线上变号. 据此证明了模态II的全局能控性. 由于模态II为运转中的必经阶段, 故切换系统能控. 研究方法也适用于Buck等变换器的能控性分析.

关键词: DC-DC变换器; 恒功率负载; 切换系统; 仿射非线性系统; 能控性

中图分类号: TP13, TM1 **文献标识码:** A

Controllability of DC-DC converters with constant power-load

XU Zhi-yu, XU Wei-sheng, YU You-ling, WU Qi-di

(School of Electronics and Information Engineering, Tongji University, Shanghai 201804, China)

Abstract: The DC-DC converter with a constant power-load is a switched nonlinear system. We study the Boost converter by building its switched-system-model in three operation modes. Mode I, II and III are the circuit topology in the switch-on mode, the switch-off mode, and the discontinuous current mode, respectively. Because the capacitor voltage can not be negative, we modify the latest results of the planar topology to obtain for the half-planar affine nonlinear systems the necessary and sufficient conditions of global controllability: criterion function changes its sign over any nonzero control curve. We thus find that Mode II is globally controllable. Since Mode II is an inevitable period in the operation, thus the switched system is controllable. This methodology can be extended to analyze the controllability of Buck converters, etc.

Key words: DC-DC converter; constant power-load; switched system; affine nonlinear system; controllability

1 引言(Introduction)

随着恒功率负载(constant power load, CPL)的日益普及^[1,2], 带CPL的DC-DC变换控制成为研究热点^[3,4], 但至今尚未涉及能控性这一基本理论问题. 负载的非线性导致整个系统的切换非线性, 显然切换线性系统规律^[5,6]不再适用, 而基于阻性负载假设的能控性结论^[7,8]亦不再有效. 针对相关判据不足的难题^[9], 本文应用平面仿射非线性系统的最新结果^[10,11], 以带CPL的Boost变换器为例, 建立系统模型, 探讨其能控性.

2 切换系统模型(Switched system model)

设CPL功率恒为 P , 由Boost变换器驱动, 则负载电压为 v_C , 负载电流为 P/v_C , 可等效为一个并联于变换器输出端的电流源 P/v_C ^[3,4]. 如图1, 开关器件导通, 关断, 电感电流断续时, 系统具有不同的电路结构, 依次定义为模态I, II, III, 表示为:

$$\begin{cases} \dot{i}_L = f_1^\sigma(i_L, v_C) + g_1^\sigma v_g, \\ \dot{v}_C = f_2^\sigma(i_L, v_C) + g_2^\sigma v_g, \end{cases} \quad \sigma = \text{I, II, III.} \quad (1)$$

其中: i_L, v_C, v_g 分别为电感电流, 电容电压, 电源电

压. 各函数见表1.

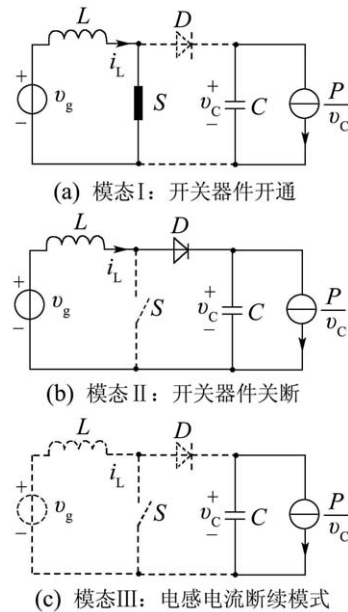


图 1 带CPL的Boost变换器的切换模态

Fig. 1 Switching modes of Boost converters driving CPL

表1 带CPL的Boost变换器的切换非线性系统模型及能控性

Table 1 Switched nonlinear system model and controllability of Boost converters driving CPL

模态 σ	$f_1^\sigma(\mathbf{x})$	$f_2^\sigma(\mathbf{x})$	$g_1^\sigma(\mathbf{x})$	$g_2^\sigma(\mathbf{x})$	控制曲线 $\Gamma(t)$	判别函数 $C^\sigma(\mathbf{x})$	变号与否	能控性
I	0	$-\frac{P}{Cv_C}$	$\frac{1}{L}$	0	$\begin{cases} i_L = \frac{1}{L}t + \lambda \\ v_C = \mu \end{cases}$	$-\frac{P}{LC\mu}$	否	不能控
II	$-\frac{1}{L}v_C$	$\frac{1}{C}(i_L - \frac{P}{v_C})$	$\frac{1}{L}$	0	$\begin{cases} i_L = \frac{1}{L}t + \lambda \\ v_C = \mu \end{cases}$	$\frac{1}{LC}(\frac{t}{L} + \lambda - \frac{P}{\mu})$	是	能控
III	0	$-\frac{P}{Cv_C}$	0	0	$\begin{cases} i_L = \lambda \\ v_C = \mu \end{cases}$	0	否	不能控

表1中, $\mathbf{x} = [i_L \ v_C]^T, t \in (-\infty, +\infty), \lambda, \mu$ 为任意常数, 且 $\mu \neq 0$.

显然各模态均为非线性子系统, 故(1)是切换非线性系统, 带CPL的Boost变换器的高频开关运行机制决定其周而复始地经历模态I, II(轻载时为模态I, II, III), 即模态I, II均为系统(1)的必经阶段, 因此只要证明模态I, II中有一个在定义区域上全局能控, 切换系统(1)就是能控的.

3 平面仿射非线性系统的全局能控性(Global controllability of planar affine nonlinear systems)

3.1 预备知识(Preliminary)

定义1 对于拓扑空间 \mathcal{M} 和 \mathcal{N} , 映射 $\pi: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ 称为同胚映射, 如果 π 是一个单的、满的、连续的映射, 并且其逆 π^{-1} 也是连续的.

定义2 向量场 \mathcal{X} 满足Lipschitz条件, 如果对于 $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n, \exists L > 0$, 使得 $\|\mathcal{X}(\mathbf{x}) - \mathcal{X}(\mathbf{y})\| \leq L\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$.

定义3^[10,11] 平面仿射非线性系统可表示为:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2) + g_1(x_1, x_2)u, \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2) + g_2(x_1, x_2)u, \end{cases} \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2. \quad (2)$$

其中: $f_i(\mathbf{x}), g_i(\mathbf{x}) \in C^k(\mathbb{R}^2) \cup \text{Lip}(\mathbb{R}^2), i = 1, 2$, 而 $C^k(\mathbb{R}^2)$ 表示 \mathbb{R}^2 上的 k 阶连续可导函数, $\text{Lip}(\mathbb{R}^2)$ 表示 \mathbb{R}^2 上的Lipschitz函数. 分段右连续函数 $u(t) \in \mathbb{R}, g(\mathbf{x}) \neq 0, \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$.

定义4^[10,11] 系统(2)的控制曲线是平面上微分方程

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = g_1(x_1, x_2)u, \\ \dot{x}_2 = g_2(x_1, x_2)u \end{cases} \quad (3)$$

的解轨线 $(x_1(t), x_2(t))$.

定义5 系统(2)是全局能控的, 如果对于 $\forall \mathbf{x}^0, \mathbf{x}^1 \in \mathbb{R}^2$, 存在控制函数 $u(t)$, 使得 $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^0, \mathbf{x}(T) = \mathbf{x}^1 (T \geq 0)$.

引理1 (Jordan曲线定理)平面上的一条简单闭曲线 C 将平面分为两个不相交的部分, 并且 C 是它们的共同边界.

引理2 (拟Jordan曲线定理)平面上一条与直线同胚且两端延伸至无穷的曲线 Γ 将平面分为两个不相交的部分. (曲线 $\Gamma, t \in \mathbb{R}$ 的两端延伸至无穷是指: $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \|\Gamma(t)\| = +\infty$.)

引理3^[10,11] 系统(2)的任意控制曲线与直线同胚, 且两端延伸至无穷.

引理4^[10,11] 设 $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2 \in \mathbb{R}^2$ 为系统(2)的同一条控制曲线上不相同的两点, 则对球心为 \mathbf{x}^2 , 半径为 $\varepsilon > 0$ 的任意小邻域 $U(\mathbf{x}^2, \varepsilon)$, 存在一个控制函数 $u(\mathbf{x})$, 使得系统初值为 \mathbf{x}^1 的正半轨在有限时间内到达 $U(\mathbf{x}^2, \varepsilon)$.

引理5^[10,11] 对于3点 $\mathbf{x}^0, \mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2 \in \mathbb{R}^2$, 如果 $\mathbf{x}^1 \in R(\mathbf{x}^0), \mathbf{x}^2 \in R(\mathbf{x}^1)$, 则 $\mathbf{x}^2 \in R(\mathbf{x}^0)$, 其中 $R(\cdot)$ 表示能达集, 定义为

$$R(\mathbf{x}^0) = \bigcup_{u \in \Sigma} \{\varphi_u(\mathbf{x}^0, t) | t > 0\}, \quad (4)$$

其中 $\Sigma = C^k(\mathbb{R}^2) \cup \text{Lip}(\mathbb{R}^2)$.

定理1^[10,11] 系统(2)全局能控, 当且仅当判别函数

$$C(\mathbf{x}) = g_1(\mathbf{x})f_2(\mathbf{x}) - g_2(\mathbf{x})f_1(\mathbf{x}) \quad (5)$$

在任意一条控制曲线上改变符号.

3.2 理论推广(Theoretical inference)

由于系统(1)中 $\frac{P}{v_C}$ 的定义域为 \mathbb{R}^+ , 故只需考虑右半平面 Π , $\Pi = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$. 由引理2, 显然任意直线 $v_C = \mu > 0$ 也将 Π 分为两个不相交的部分.

定义 6 半平面 Π 上的仿射非线性系统:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2) + g_1(x_1, x_2)u, \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2) + g_2(x_1, x_2)u, \end{cases} \quad \mathbf{x} \in \Pi. \quad (6)$$

其中 $f_i(\mathbf{x}), g_i(\mathbf{x}) \in C^k(\Pi) \cup \text{Lip}(\Pi)$, 且 $g(\mathbf{x}) \neq \mathbf{0}, \forall \mathbf{x} \in \Pi$.

定义 7 系统(6)是全局能控的, 如果对于 $\forall \mathbf{x}^0, \mathbf{x}^1 \in \Pi$, 存在一个分段右连续的控制函数 $u(t)$, 对于 $T \geq 0$ 满足

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^0, \mathbf{x}(T) = \mathbf{x}^1,$$

且 $\mathbf{x}(t) \in \Pi, \forall t \in [0, T]^*$.

推论 1 系统(6)是全局能控的, 如果

- i) 控制曲线 $\Gamma = \{\mathbf{x} | x_2 = c\}$, c 为任意正实数;
- ii) 判别函数

$$C(\mathbf{x}) = g_1(\mathbf{x})f_2(\mathbf{x}) - g_2(\mathbf{x})f_1(\mathbf{x})$$

在系统(6)的任意控制曲线 Γ 上变号.

证 如图2, 设控制曲线 $\Gamma_1 = \{\mathbf{x} | x_2 = c_1\}$, $\forall \mathbf{x}^0 \in \Gamma_1$. 根据引理4, $\forall \mathbf{x}^1 \in \Gamma_1, \mathbf{x}^1 \neq \mathbf{x}^0$, 在其邻域 $U(\mathbf{x}^1, \varepsilon_1)$ 内, 必存在 \mathbf{x}^2 , 有 $\mathbf{x}^2 \in R(\mathbf{x}^0)$.

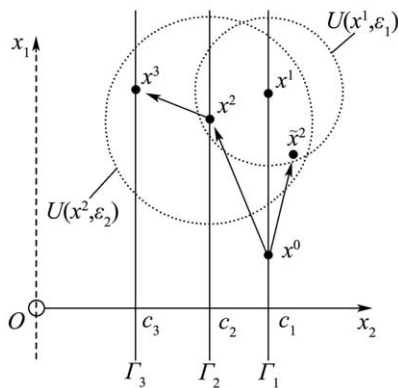


图2 半平面仿射非线性系统的能控性

Fig. 2 Controllability of half-planar affine nonlinear systems

由于控制曲线族在半平面 Π 内呈无限密集分布, 必有 $\mathbf{x}^2 \in \Gamma_2, \Gamma_2 = \{\mathbf{x} | x_2 = c_2\}$.

同理 $\mathbf{x}^3 \in R(\mathbf{x}^2)$.

由引理5中能达集的传递性, $\mathbf{x}^3 \in R(\mathbf{x}^0)$.

条件ii)则保证了任意能达集分布于控制曲线

的两侧. 如 $\mathbf{x}^2, \tilde{\mathbf{x}}^2 \in R(\mathbf{x}^1), \mathbf{x}^2, \tilde{\mathbf{x}}^2$ 分别位于 Γ_1 的左右两侧.

鉴于 \mathbf{x}^0 取值的任意性, 系统(6)是全局能控的. 证毕.

4 驱动CPL的Boost变换器的能控性(Controllability of Boost converters driving CPL)

由表1的系统描述, 带CPL的Boost变换器在3种模态下的子电路均可视为一个定义在半平面 Π 上的仿射非线性系统. 分别求解各模态的控制曲线和判别函数, 并列于表1.

模态I的控制曲线在 $v_C O i_L$ 平面上是与 i_L 轴平行的一族直线, 每个 λ 对应一条控制曲线, 因此该控制曲线上的判别函数为定值 $-\frac{P}{LC\mu}$.

模态II的控制曲线也是与 i_L 轴平行的一族直线(如图3), 由于 $t \in (-\infty, +\infty)$, 因此在任意控制曲线上, 判别函数 $\frac{1}{LC}(\frac{t}{L} + \lambda - \frac{P}{\mu})$ 一定变号.

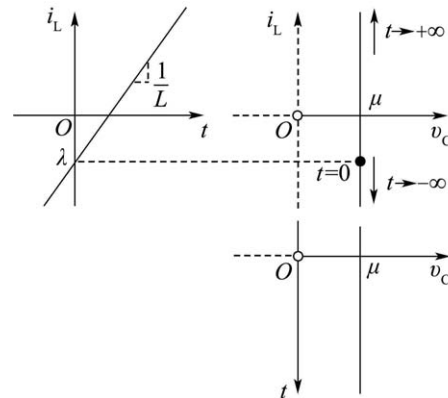


图3 带CPL的Boost变换器模态II的控制曲线

Fig. 3 Control curve of Mode II of Boost converters with CPL

模态III中, 由于 $g^{III}(\mathbf{x}) \equiv 0$, 已不满足定义6的前提假设. 直观上, 控制 u 无法对状态 \mathbf{x} 施加影响, 显然该子系统是不能控的.

根据推论1, 模态I非全局能控, 模态II为全局能控. 由于模态II是Boost变换器的必经模态, 因此切换系统的能控性一定可在模态II期间实现, 从而证明带CPL的Boost变换器是能控的.

同理, 考察带CPL的Buck变换器(见表2). 表2中, $\mathbf{x} = [i_L, v_C]^T, t \in (-\infty, +\infty), \lambda, \mu$ 为任意常数, 且 $\mu \neq 0$. 根据推论1, 其模态I为全局能控, 模态II非全局能控. 由于模态I是Buck变换器的必经模态, 因此带CPL的Buck变换器也是能控的.

* 对于定义在半平面 Π 上的仿射非线性系统, 因为存在 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \setminus \Pi$, 故全局能控还需进一步要求在整个演化过程中状态 $\mathbf{x}(t)$ 都不能离开 Π .

表2 带CPL的Buck变换器的切换非线性系统模型及能控性

Table 2 Switched nonlinear system model and controllability of Buck converters driving CPL

模态 σ	$f_1^\sigma(x)$	$f_2^\sigma(x)$	$g_1^\sigma(x)$	$g_2^\sigma(x)$	控制曲线 $\Gamma(t)$	判别函数 $C^\sigma(x)$	变号与否	能控性
I	$-\frac{1}{L}v_C$	$\frac{1}{C}(i_L - \frac{P}{v_C})$	$\frac{1}{L}$	0	$\begin{cases} i_L = \frac{1}{L}t + \lambda \\ v_C = \mu \end{cases}$	$\frac{1}{LC}(\frac{t}{L} + \lambda - \frac{P}{\mu})$	是	能控
II	$-\frac{1}{L}v_C$	$\frac{1}{C}(i_L - \frac{P}{v_C})$	0	0	$\begin{cases} i_L = \lambda \\ v_C = \mu \end{cases}$	0	否	不能控
III	0	$-\frac{P}{Cv_C}$	0	0	$\begin{cases} i_L = \lambda \\ v_C = \mu \end{cases}$	0	否	不能控

5 结论(Conclusions)

以Boost变换器为例,考察带CPL时系统的能控性.建立切换系统模型,结合电容电压的非负性,修正现有定理,导出半平面上仿射非线性系统的全局能控性判据,根据各模态的判别函数在控制曲线上是否变号,判定模态I, III不能控,模态II全局能控.由于模态II是切换系统的必经阶段,因此整个切换系统的能控性一定能在模态II的作用期间实现,从而带CPL的Boost变换器是能控的.同理可证明带CPL的Buck变换器也是能控的.

参考文献(References):

- [1] LUO S. A review of distributed power systems part I: DC distributed power system[J]. *IEEE Aerospace and Electronic Systems Magazine*, 2005, 20(8): 5 – 16.
- [2] ZHANG H, SAUDEMONT C, ROBYNS B, et al. Stability analysis on the DC power distribution system of more electric aircraft[C] // *Proceedings of 13th Power Electronics and Motion Control Conference*. New York: IEEE, 2008, 8: 1523 – 1528.
- [3] RIVETTA C H, EMADI A, WILLIAMSON G A, et al. Analysis and control of a buck DC-DC converter operating with constant power load in sea and undersea vehicles[J]. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2006, 42(2): 559 – 572.
- [4] KWASINSKI A, KREIN P T. Passivity-based control of buck converters with constant-power loads[C] // *Proceedings of 38th Power Electronics Specialists Conference*. New York: IEEE, 2007, 6: 259 – 265.
- [5] XIE G M, ZHENG D Z, WANG L. Controllability of switched linear systems[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2002, 47(8): 1401 – 1405.
- [6] 肖文勋,张波,陈良刚. DC-DC变换器分段线性系统的最小投影法切换律[J]. *控制理论与应用*, 2009, 26(3): 329 – 331.
(XIAO Wenxun, ZHANG Bo, CHEN Lianggang. Min-projection-

strategy switching rules for DC-DC converters modeled as piecewise linear systems[J]. *Control Theory & Applications*, 2009, 26(3): 329 – 331.)

- [7] 胡宗波,张波,邓卫华,等. PWM DC-DC变换器混杂动态系统的能控性和能观性[J]. *电工技术学报*, 2005, 20(2): 76 – 82.
(HU Zongbo, ZHANG Bo, DENG Weihua, et al. Controllability and observability of PWM DC-DC converters as hybrid dynamic systems[J]. *Transactions of China Electrotechnical Society*, 2005, 20(2): 76 – 82.)
- [8] 胡宗波,张波,胡少甫,等. 基于切换线性系统的DC-DC变换器的输出能控性研究[J]. *电子学报*, 2005, 33(2): 370 – 374.
(HU Zongbo, ZHANG Bo, HU Shaofu, et al. Output controllability study on DC-DC converters as switched linear systems[J]. *Acta Electronica Sinica*, 2005, 33(2): 370 – 374.)
- [9] 程代展,郭宇骞. 切换系统进展[J]. *控制理论与应用*, 2005, 22(6): 954 – 960.
(CHENG Daizhan, GUO Yuqian. Advances on switched systems[J]. *Control Theory & Applications*, 2005, 22(6): 954 – 960.)
- [10] SUN Y M. Necessary and sufficient condition for global controllability of planar affine nonlinear systems[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2007, 52(8): 1454 – 1460.
- [11] SUN Y M, MEI S W, LU Q. On global controllability of affine nonlinear systems with a triangular-like structure[J]. *Science in China(Series F-Information Sciences)*, 2007, 50(6): 831 – 845.

作者简介:

徐志宇 (1982—),男,博士,目前研究方向为系统控制理论在DC-DC变换中的应用, E-mail: xuzhiyu@yahoo.cn;

许维胜 (1966—),男,教授,博士生导师,主要研究方向为智能自动化理论及应用, E-mail: xuweisheng@tongji.edu.cn;

余有灵 (1973—),男,副教授,主要研究方向为集成电路设计、功率电子系统的控制, E-mail: yuyouling@tongji.edu.cn;

吴启迪 (1947—),女,教授,博士生导师,主要研究方向为现代控制理论、计算机集成制造系统等, E-mail: qidi@tongji.edu.cn.