

## Flyback CCM Small signal Modeling When consider the ESR

下面对工作在 CCM 模式下的 Flyback 电源进行小信号的建模。分两个步骤进行，首先是先对理想的 Flyback 电源进行小信号建模；其次是对考虑到输出电解电容的 ESR 时的 Flyback 电源进行小信号建模。以此来观察电解电容的 ESR 对 Flyback 电源小信号模型的影响。

### Part I

有如图 1-1 所示的理想的 Flyback 电源：

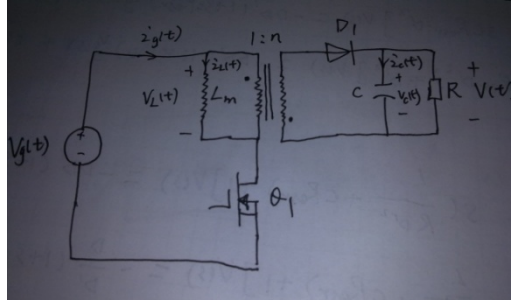


图 1-1 理想的 Flyback 电源

1、当  $Q_1$  on,  $D_1$  off 时，电路变为图 1-2 所示

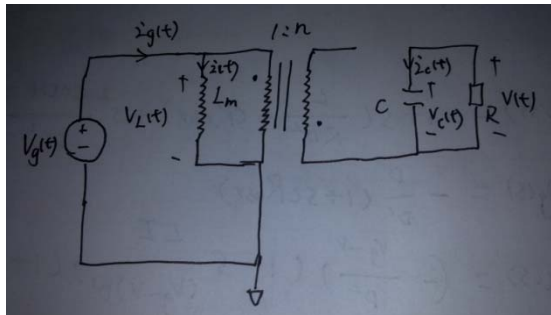


图 1-2  $Q_1$  on,  $D_1$  off 时的电路

$$v_L(t) = v_g(t) \quad \text{----- (1-1)}$$

$$i_c(t) = -\frac{v(t)}{R} \quad \text{----- (1-2)}$$

2、当  $Q_1$  off,  $D_1$  on 时，电路变为图 1-3 所示

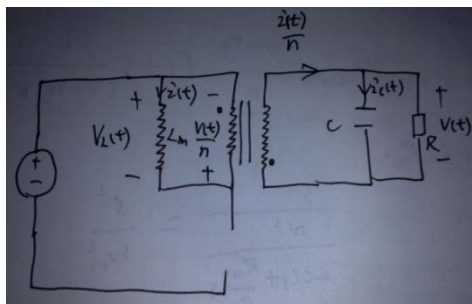


图 1-3  $Q_1$  off,  $D_1$  on 时的电路

$$v_L(t) = -\frac{v(t)}{n} \quad \text{----- (1-3)}$$

$$i_c(t) = \frac{i(t)}{n} - \frac{v(t)}{R} \quad \text{----- (1-4)}$$

式(1-1)、式(1-2)、式(1-3)、式(1-4)在一个开关周期之内进行平均化处理，有：

$$\langle v_L(t) \rangle_{T_s} = L \frac{d \langle i(t) \rangle_{T_s}}{dt} = d(t) \langle v_g(t) \rangle_{T_s} - d'(t) \frac{\langle v(t) \rangle_{T_s}}{n} \quad \text{----- (1-5)}$$

$$\langle i_c(t) \rangle_{T_s} = C \frac{d \langle v_c(t) \rangle_{T_s}}{dt} = d'(t) \frac{\langle i(t) \rangle_{T_s}}{n} - \frac{\langle v(t) \rangle_{T_s}}{R} \quad \text{----- (1-6)}$$

而  $v_c(t) = v(t)$ ，所以  $\langle v_c(t) \rangle_{T_s} = \langle v(t) \rangle_{T_s}$

令

$$\langle i(t) \rangle_{T_s} = I + \hat{i}(t)$$

$$\langle v(t) \rangle_{T_s} = V + \hat{v}(t)$$

$$\langle v_g(t) \rangle_{T_s} = V_g + \hat{v}_g(t)$$

$$d(t) = D + \hat{d}(t)$$

$d'(t) = 1 - d(t) = 1 - D - \hat{d}(t) = D' - \hat{d}(t)$ ，其中大写字母表示稳态时的变量，带上标符号的表示小信号变量，即干扰。

使用泰勒公式分别对式(1-5)和式(1-6)展开，有：

$$L \frac{dI}{dt} = DV_g - D' \frac{V}{n} = 0 \quad \text{----- (1-7)}$$

$$C \frac{dV}{dt} = D' \frac{I}{n} - \frac{V}{R} = 0 \quad \text{----- (1-8)}$$

$$L \frac{d \hat{i}(t)}{dt} = -\frac{D'}{n} \hat{v}(t) + D \hat{v}_g(t) + (V_g + \frac{V}{n}) \hat{d}(t) \quad \text{----- (1-9)}$$

$$C \frac{d \hat{v}(t)}{dt} = -\frac{\hat{v}(t)}{R} + \frac{D'}{n} \hat{i}(t) - \frac{I}{n} \hat{d}(t) \quad \text{----- (1-10)}$$

其中，式(1-7)和式(1-8)是稳态时的表达式；式(1-9)和式(1-10)是小信号模型表达式。

对式(1-9)和式(1-10)进行拉氏变化，有：

$$Ls \hat{i}(s) = -\frac{D'}{n} \hat{v}(s) + D \hat{v}_g(s) + (V_g + \frac{V}{n}) \hat{d}(s) \quad \text{----- (1-11)}$$

$$Cs v(s) = -\frac{v(s)}{R} + \frac{D'}{n} i(s) - \frac{I}{n} d(s) \quad \text{----- (1-12)}$$

由式(1-12)得出:

$$i(s) = \frac{n}{D'} [(Cs + \frac{1}{R})v(s) + \frac{I}{n} d(s)] \quad \text{----- (1-13)}$$

把式(1-13)代入式(1-11), 有:

$$Ls \frac{n}{D'} [(Cs + \frac{1}{R})v(s) + \frac{I}{n} d(s)] = -\frac{D'}{n} v(s) + Dv_g(s) + (V_g + \frac{V}{n})d(s) \quad \text{----- (1-14)}$$

整理式(1-14)得:

$$v(s) = \frac{n \frac{D'}{D'}}{s^2 LC (\frac{n}{D'})^2 + s \frac{L}{R} (\frac{n}{D'})^2 + 1} v_g(s) + \frac{\frac{n}{D'} (V_g + \frac{V}{n}) [1 - s \frac{LI}{D' (V_g + \frac{V}{n})}]}{s^2 LC (\frac{n}{D'})^2 + s \frac{L}{R} (\frac{n}{D'})^2 + 1} d(s) \quad \text{----- (1-15)}$$

令

$$G_g(s) = \frac{n \frac{D'}{D'}}{s^2 LC (\frac{n}{D'})^2 + s \frac{L}{R} (\frac{n}{D'})^2 + 1} \quad \text{----- (1-16)}$$

$$G_d(s) = \frac{\frac{n}{D'} (V_g + \frac{V}{n}) [1 - s \frac{LI}{D' (V_g + \frac{V}{n})}]}{s^2 LC (\frac{n}{D'})^2 + s \frac{L}{R} (\frac{n}{D'})^2 + 1} \quad \text{----- (1-17)}$$

式(1-15)可以写成:

$$v(s) = G_g(s)v_g(s) + G_d(s)d(s) \quad \text{----- (1-18)}$$

由式(1-7)得:

$$D = \frac{V}{V + nV_g}, \quad D' = \frac{nV_g}{V + nV_g}, \quad I = \frac{n}{D'} \frac{V}{R} \quad \text{----- (1-19)}$$

因此, 令

$$G_{g0} = n \frac{D'}{D} = \frac{V}{V_g} \quad \text{----- (1-20)}$$

$$G_{d0} = \frac{n}{D'} (V_g + \frac{V}{n}) = \frac{(V + nV_g)^2}{nV_g} \quad \text{----- (1-21)}$$

$$\omega_z = D' \frac{(V_g + \frac{V}{n})}{LI} = \frac{R V_g}{L V} \frac{V_g}{nV_g + V} \quad \text{----- (1-22)}$$

$$\omega_p = \frac{D'}{n} \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{V_g}{V + nV_g} \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \text{----- (1-23)}$$

$$Q = \frac{D'}{n} R \sqrt{\frac{C}{L}} = R \frac{V_g}{V + nV_g} \sqrt{\frac{C}{L}} \quad \text{----- (1-24)}$$

因此，式(1-16)和式(1-17)可以写成：

$$G_g(s) = G_{g0} \frac{1}{1 + \frac{s}{\omega_p Q} + \left(\frac{s}{\omega_p}\right)^2} \quad \text{----- (1-25)}$$

$$G_d(s) = G_{d0} \frac{1 - \frac{s}{\omega_z}}{1 + \frac{s}{\omega_p Q} + \left(\frac{s}{\omega_p}\right)^2} \quad \text{----- (1-26)}$$

可以看出， $G_d(s)$ 有一个右半平面的零点。

### Part II

现在来考虑非理想的 Flyback 电源，如图 2-1 所示的考虑到输出电解电容 ESR 的 Flyback 电源

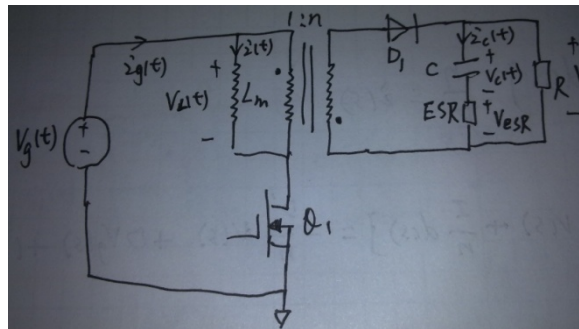


图 2-1 输出电容含有 ESR 的 Flyback 电源

1、当  $Q_1$  on,  $D_1$  off 时，电路变为图 2-2 所示

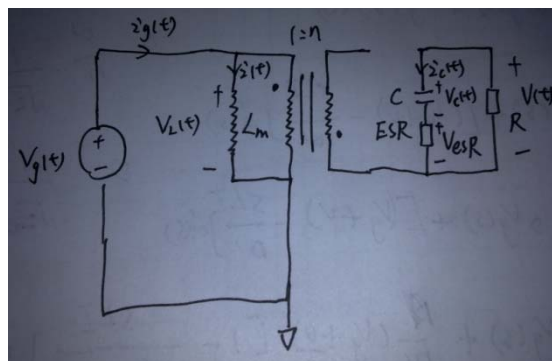


图 2-2  $Q_1$  on,  $D_1$  off 时的电路

$$v_L(t) = v_g(t) \quad \text{----- (2-1)}$$

$$i_c(t) = -\frac{v(t)}{R} \quad \text{----- (2-2)}$$

$$v_c(t) = v(t) - i_c(t)R_{esr} = v(t)\left(1 + \frac{R_{esr}}{R}\right) \quad \text{----- (2-3)}$$

2、当  $Q_1$  off,  $D_1$  on 时, 电路变为图 2-3 所示

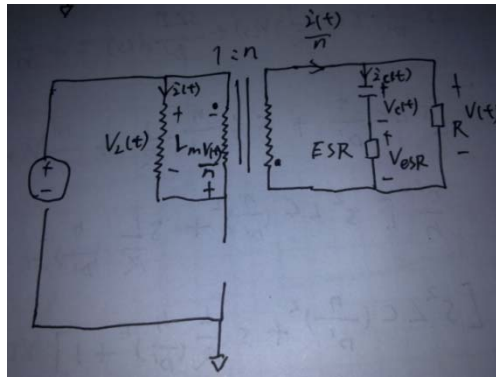


图 2-3  $Q_1$  off,  $D_1$  on 时的电路

$$v_L(t) = -\frac{v(t)}{n} \quad \text{----- (2-4)}$$

$$i_c(t) = \frac{i(t)}{n} - \frac{v(t)}{R} \quad \text{----- (2-5)}$$

$$v_c(t) = v(t) - i_c(t)R_{esr} = v(t)\left(1 + \frac{R_{esr}}{R}\right) - \frac{R_{esr}}{n}i(t) \quad \text{----- (2-6)}$$

式(2-1)、式(2-2)、式(2-3)、式(2-4)、式(2-5)、式(2-6)在一个开关周期内进行平均化处理, 有:

$$\langle v_L(t) \rangle_{T_s} = L \frac{d \langle i(t) \rangle_{T_s}}{dt} = d(t) \langle v_g(t) \rangle_{T_s} - d'(t) \frac{\langle v(t) \rangle_{T_s}}{n} \quad \text{----- (2-7)}$$

$$\langle i_c(t) \rangle_{T_s} = C \frac{d \langle v_c(t) \rangle_{T_s}}{dt} = d'(t) \frac{\langle i(t) \rangle_{T_s}}{n} - \frac{\langle v(t) \rangle_{T_s}}{R} \quad \text{----- (2-8)}$$

$$\langle v_c(t) \rangle_{T_s} = \langle v(t) \rangle_{T_s} \left(1 + \frac{R_{esr}}{R}\right) - d'(t) \frac{R_{esr}}{n} \langle i(t) \rangle_{T_s} \quad \text{----- (2-9)}$$

注意, 此时的  $\langle v_c(t) \rangle_{T_s} \neq \langle v(t) \rangle_{T_s}$ 。令:

$$\langle i(t) \rangle_{T_s} = I + \hat{i}(t)$$

$$\langle v(t) \rangle_{T_s} = V + \hat{v}(t)$$

$$\langle v_g(t) \rangle_{Ts} = V_g + \hat{v}_g(t)$$

$$\langle v_c(t) \rangle_{Ts} = V_c + \hat{v}_c(t)$$

$$d(t) = D + \hat{d}(t)$$

$d'(t) = 1 - d(t) = 1 - D - \hat{d}(t) = D' - \hat{d}(t)$ ，其中大写字母表示稳态时的变量，带上标符号的表示小信号变量，即干扰。

使用泰勒公式分别对式(2-7)、式(2-8)、式(2-9)展开，有：

$$L \frac{dI}{dt} = DV_g - D' \frac{V}{n} = 0 \quad \text{----- (2-10)}$$

$$C \frac{dV_c}{dt} = D' \frac{I}{n} - \frac{V}{R} = 0 \quad \text{----- (2-11)}$$

$$V_c = V \left(1 + \frac{R_{esr}}{R}\right) - D' \frac{R_{esr}}{n} I \quad \text{----- (2-12)}$$

$$L \frac{d\hat{i}(t)}{dt} = -\frac{D'}{n} \hat{v}(t) + D \hat{v}_g(t) + \left(V_g + \frac{V}{n}\right) \hat{d}(t) \quad \text{----- (2-13)}$$

$$C \frac{d\hat{v}_c(t)}{dt} = -\frac{\hat{v}(t)}{R} + \frac{D'}{n} \hat{i}(t) - \frac{I}{n} \hat{d}(t) \quad \text{----- (2-14)}$$

$$\hat{v}_c(t) = \left(1 + \frac{R_{esr}}{R}\right) \hat{v}(t) - D' \frac{R_{esr}}{n} \hat{i}(t) + \frac{R_{esr}}{n} I \hat{d}(t) \quad \text{----- (2-15)}$$

式(2-10)、式(2-11)、式(2-12)为稳态时的表达式；式(2-13)、式(2-14)、式(2-15)为小信号模型表达式。式(2-13)、式(2-14)、式(2-15)分别进行拉氏变换，有：

$$Ls\hat{i}(s) = -\frac{D'}{n} \hat{v}(s) + D \hat{v}_g(s) + \left(V_g + \frac{V}{n}\right) \hat{d}(s) \quad \text{----- (2-16)}$$

$$Cs\hat{v}_c(s) = -\frac{\hat{v}(s)}{R} + \frac{D'}{n} \hat{i}(s) - \frac{I}{n} \hat{d}(s) \quad \text{----- (2-17)}$$

$$\hat{v}_c(s) = \left(1 + \frac{R_{esr}}{R}\right) \hat{v}(s) - D' \frac{R_{esr}}{n} \hat{i}(s) + \frac{R_{esr}}{n} I \hat{d}(s) \quad \text{----- (2-18)}$$

把式(2-18)代入式(2-17)有：

$$Cs \left[ \left(1 + \frac{R_{esr}}{R}\right) \hat{v}(s) - D' \frac{R_{esr}}{n} \hat{i}(s) + \frac{R_{esr}}{n} I \hat{d}(s) \right] = -\frac{\hat{v}(s)}{R} + \frac{D'}{n} \hat{i}(s) - \frac{I}{n} \hat{d}(s) \quad \text{----- (2-19)}$$

整理式(2-19)，得：

$$i(s) = \frac{n}{D'} \frac{1 + sC(R + R_{esr})}{1 + sCR_{esr}} v(s) + \frac{I}{D'} d(s) \quad \text{----- (2-20)}$$

把式(2-20)代入式(2-16)得:

$$Ls \left[ \frac{n}{D'} \frac{1 + sC(R + R_{esr})}{1 + sCR_{esr}} v(s) + \frac{I}{D'} d(s) \right] = -\frac{D'}{n} v(s) + Dv_g(s) + \left( V_g + \frac{V}{n} \right) d(s) \quad \text{----- (2-21)}$$

整理式(2-21)的:

$$v(s) = G_{g\_esr}(s)v_g(s) + G_{d\_esr}(s)d(s) \quad \text{----- (2-22)}$$

其中:

$$G_{g\_esr}(s) = \frac{\frac{nD'}{D}(1 + sCR_{esr})}{1 + s \left[ \frac{L}{R} \left( \frac{n}{D'} \right)^2 + CR_{esr} \right] + s^2 LC \left( \frac{n}{D'} \right)^2 \left( 1 + \frac{R_{esr}}{R} \right)} \quad \text{----- (2-23)}$$

$$G_{d\_esr}(s) = \frac{\frac{n}{D'} \left( V_g + \frac{V}{n} \right) \left[ 1 - s \frac{LI}{D' \left( V_g + \frac{V}{n} \right)} \right] (1 + sCR_{esr})}{1 + s \left[ \frac{L}{R} \left( \frac{n}{D'} \right)^2 + CR_{esr} \right] + s^2 LC \left( \frac{n}{D'} \right)^2 \left( 1 + \frac{R_{esr}}{R} \right)} \quad \text{----- (2-24)}$$

由式(2-10)得:

$$D = \frac{V}{V + nV_g}, \quad D' = \frac{nV_g}{V + nV_g}, \quad I = \frac{n}{D'} \frac{V}{R} \quad \text{----- (2-25)}$$

令:

$$G_{g0\_esr} = n \frac{D'}{D} = \frac{V}{V_g} \quad \text{----- (2-26)}$$

$$G_{d0\_esr} = \frac{n}{D'} \left( V_g + \frac{V}{n} \right) = \frac{(V + nV_g)^2}{nV_g} \quad \text{----- (2-27)}$$

$$\omega_{c\_esr} = \frac{1}{CR_{esr}} \quad \text{----- (2-28)}$$

$$\omega_{z\_esr} = \frac{D' \left( V_g + \frac{V}{n} \right)}{LI} = \frac{R}{L} \frac{V_g}{V} \frac{V_g}{nV_g + V} \quad \text{----- (2-29)}$$

$$\omega_{p\_esr} = \frac{D'}{n \sqrt{LC \left( 1 + \frac{R_{esr}}{R} \right)}} = \frac{V_g}{V + nV_g} \frac{1}{\sqrt{LC \left( 1 + \frac{R_{esr}}{R} \right)}} \quad \text{----- (2-30)}$$

$$Q_{esr} = \frac{\frac{n}{D} \sqrt{LC(1 + \frac{R_{esr}}{R})}}{\frac{L}{R} (\frac{n}{D})^2 + CR_{esr}} = \frac{(\frac{V}{V_g} + n) \sqrt{LC(1 + \frac{R_{esr}}{R})}}{\frac{L}{R} (\frac{V}{V_g} + n)^2 + CR_{esr}} \quad \text{----- (2-31)}$$

那么，式(2-23)和式(2-24)可以写成：

$$G_{g\_esr}(s) = G_{g0\_esr} \frac{1 + \frac{s}{\omega_{c\_esr}}}{1 + \frac{s}{\omega_{p\_esr} Q_{esr}} + (\frac{s}{\omega_{p\_esr}})^2} \quad \text{----- (2-32)}$$

$$G_{d\_esr}(s) = G_{d0\_esr} \frac{(1 - \frac{s}{\omega_{z\_esr}})(1 + \frac{s}{\omega_{c\_esr}})}{1 + \frac{s}{\omega_{p\_esr} Q_{esr}} + (\frac{s}{\omega_{p\_esr}})^2} \quad \text{----- (2-33)}$$

可以看到， $G_{g\_esr}(s)$  和  $G_{d\_esr}(s)$  被电解电容的 ESR 多增加了一个左半平面的零点。

### Part III

下面通过一个例子来分别画出  $G_g(s)$ 、 $G_d(s)$ 、 $G_{g\_esr}(s)$  和  $G_{d\_esr}(s)$  的波形，以此来探寻

电解电容对传输函数的影响。

现在有一个 Flyback 电源，其参数：

- 1、输入电压： $V_g = 300V$
- 2、只有一个输出绕组，输出电压： $V_o = 10V$
- 3、输出电流： $I_o = 20A$
- 4、输出等效电阻： $R_o = \frac{V_o}{I_o} = 0.5$
- 5、反射电压： $V_{or} = 100V$
- 6、匝比： $n = \frac{V_o}{V_{or}} = 0.1$
- 7、占空比： $D = \frac{V}{V + nV_g} = 0.25$ ； $D' = 0.75$
- 8、励磁电感电流平均值： $I = \frac{nI_o}{D} = \frac{40}{15} A$



9、电感电流纹波值和纹波系数： $\Delta I = \frac{I}{10} = \frac{4}{15} A, k = \frac{1}{10}$

10、电感电流最大值： $I_{\max} = I + \frac{\Delta I}{2} = \frac{42}{15} A$

11、电感电流最小值： $I_{\min} = I - \frac{\Delta I}{2} = \frac{38}{15} A$

12、开关频率： $f_s = 100kHz$

13、开关周期： $T_s = \frac{1}{f_s} = 10\mu s$

14、输出纹波电压： $\Delta V_o = \frac{V_o}{200} = 0.05V$

15、最小电感量： $L_o = \frac{P_o}{f_s I \Delta I} = 2.8125mH$

16、最小输出电容： $C_o = \frac{I_o D T_s}{\Delta V_o} = 1000\mu F$  选取 Rubycon 的 ZLH 系列的 1800uF/35V。

17、电解电容的 ESR： $R_{esr} = 0.017$

18、 $G_{g0} = G_{g0\_esr} = 0.033$

19、 $G_{d0} = G_{d0\_esr} = 53.333V$

20、 $\omega_z = 40000$

21、 $\omega_p = 4472$

22、 $Q = 2.236$

23、 $\omega_{c\_esr} = 58820$

24、 $\omega_{z\_esr} = 40000$

25、 $\omega_{p\_esr} = 4398$

26、 $Q_{esr} = 1.943$

根据上面的参数，使用 Mathcad 分别画出  $G_g(s)$ 、 $G_d(s)$ 、 $G_{g\_esr}(s)$  和  $G_{d\_esr}(s)$  的波形。

如图 3-1 和图 3-2 所示:

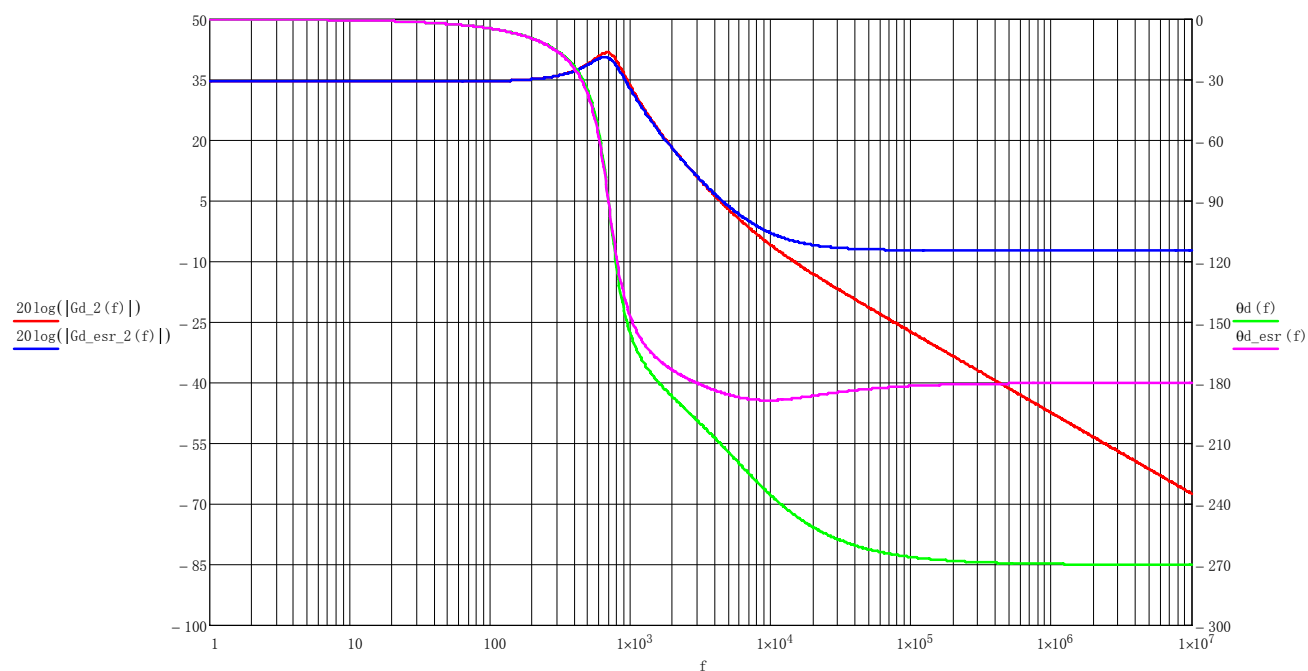


图 3-1  $G_d(s)$  和  $G_{d\_esr}(s)$  的 Bode 图

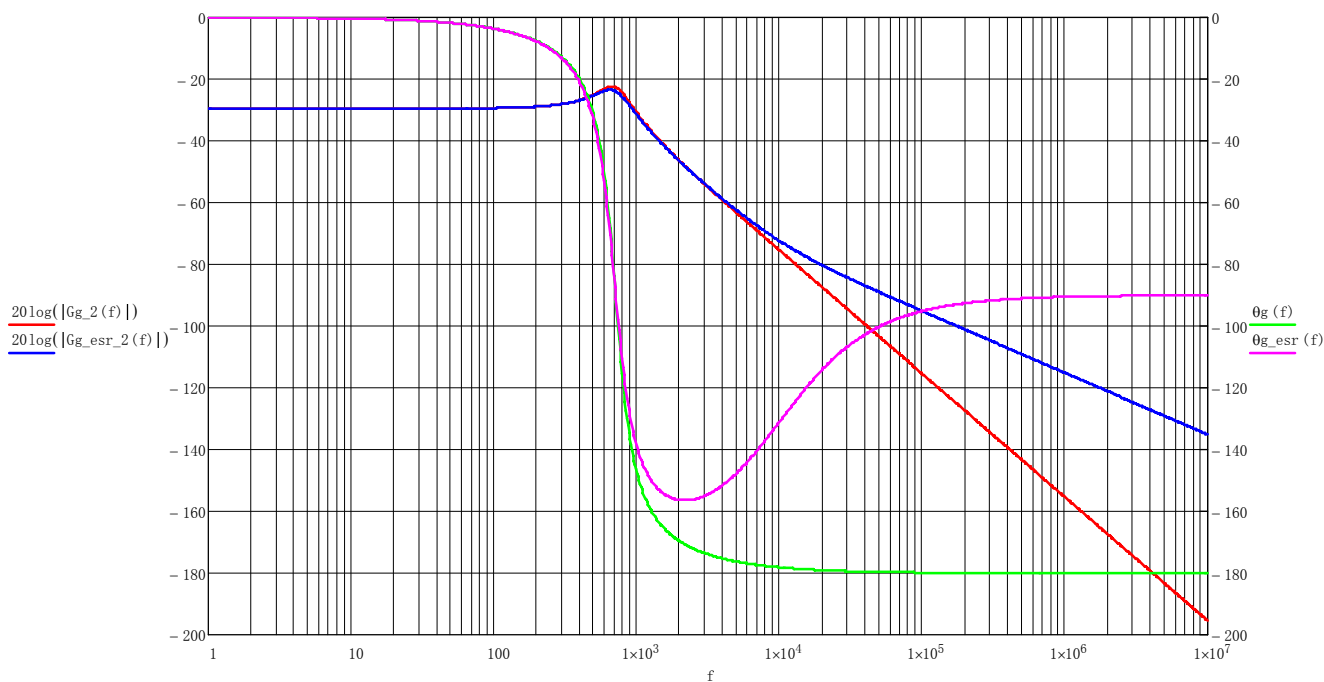


图 3-2  $G_g(s)$  和  $G_{g\_esr}(s)$  的 Bode 图

对于  $G_d(s)$  和  $G_{d\_esr}(s)$ ，主要有以下几点：

- 1、由于输出电解电容的 ESR， $G_{d\_esr}(s)$  比  $G_d(s)$  多了一个零点。此零点位于左半平面，左半平面的零点有如下特征：给幅频带来+20dB/dec 斜率的响应，给相频带来+90° 位移的

响应。从图 3-2 可以看出，在  $\omega_{z\_esr}$  以上，原来为-20dB/dec 斜率的响应，现在变为了 0dB/dec 斜率响应；原来为-270° 相位滞后的响应，现在变为了-180° 相位滞后的响应。

2、不管考虑不考虑输出电解电容的 ESR， $G_d(s)$  和  $G_{d\_esr}(s)$  都存在一个右半平面的零点。右半平面的零点有如下特征：给幅频带来+20dB/dec 斜率的响应，给相频带来-90° 位移的响应。从图 3-2 也可以看出，对于  $G_d(s)$  而言，在  $\omega_z$  以上，原来为-40dB/dec 斜率响应，现在变为了-20dB/dec 斜率响应；相移由原来的-180° 变为-270°。

3、输出电解电容的 ESR 不仅给  $G_d(s)$  新增了一个左半平面的零点，而且还影响到  $\omega_p$  和  $Q$ 。ESR 都会使  $\omega_p$  和  $Q$  变小，但是这种影响的效果很小。

4、输出电解电容的 ESR 对直流增益  $G_{d0}$  和 Flyback 本身固有的右半平面零点  $\omega_z$  没有任何影响。

5、从  $G_{d0} = \frac{n}{D}(V_g + nV) = \frac{(V + nV_g)^2}{nV_g}$  看出， $G_{d0}$  只受  $V_g$  的影响。 $G_{d0}$  随着  $V_g$  的减小而减小，在  $V_g = 100V$  处， $G_{d0}$  取得最小值，为 40v。

6、从  $\omega_z = D \frac{V_g + \frac{V}{n}}{LI} = \frac{R V_g}{L V} \frac{V_g}{nV_g + V}$  看出， $\omega_z$  只受到  $R$  也就是输出电流  $I_o$  和  $V_g$  的影响。

当负载变重和输入电压变小即  $R$  和  $V_g$  变小时， $\omega_z$  取得最小值；当负载变到临街模式时的负载和  $V_g$  变大时， $\omega_z$  取得最大值。 $\omega_z$  的变化特性给我们的环路补偿带来了问题，因此此右半平面的零点的补偿是相当困难的。